Fiche d'exercices : Nombres Premiers

Exercice 1 :

Sans calculatrice, déterminer si les entiers suivants sont des nombres premiers

97 ; 109 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719

Exercice 2 :

Soit p un nombre premier ≥ 5

1) Démontrer que p^2-1 est divisible par 3
2) Démontrer que p^2-1 est divisible par 8
3) Que peut-on en déduire pour p^2-1 ?

Exercice 3 :

$p > 3$ est un nombre premier

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2) Prouver que p^2+11 est divisible par 12

Exercice 4 :

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $30n+7$ n'est jamais la somme de deux nombres premiers

Exercice 5 : Les nombres de Mersenne

Pour $n \geq 1$, le nième nombre de Mersenne est le nombre $M_n = 2^n-1$

1) Quels sont les nombres de Mersenne qui sont premiers pour $n \leq 6$?
2) Montrer que $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$
3) Montrer que si n n'est pas premier alors le nombre de Mersenne M_n ne l'est pas non plus.
   En déduire que si M_n est premier alors n est premier
4) La réciproque est-elle vraie ?
5) Soit a et n deux entiers tels que $a \geq 2$ et $n \geq 2$
   Montrer que si a^n-1 est premier alors nécessairement $a=2$ et n est premier

Décomposition en facteurs premiers. Nombres de diviseurs

Exercice 6 :

1) Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56
2) Trouver tous les diviseurs de 84 , puis résoudre l'équation $x(x+1)(2x+1)=84$

Exercice 7 :

Le produit de deux entiers naturels a et b (a < b) est 11 340. On note d leur pgcd.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?

b) Pourquoi d = $2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 2$?

2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.

a) Démontrer que d = 18.

b) En déduire a et b.

Exercice 8 :

α et β sont deux naturels et n = $2^{\alpha}\times 3^{\beta}$.

Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que (α − 1)(β − 1) = 3

2) En déduire n

Exercice 9 :

Un entier n a 5 diviseurs et n − 16 est le produit de deux nombres premiers.

1) Prouver que n = p^4 avec p premier.

2) Écrire n − 16 sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de p.

3) En déduire la valeur de n

Exercice 10 : Partie A

On considère l'équation suivante où *x* et *y* sont des entiers naturels : $x^2-8y^2=1$ (*E*).

1) Déterminer un couple solution (x ; y) où x et y sont deux entiers naturels.

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :

$$x_0=1 \ , \ y_0=0 \text{ , et pour tout entier naturel } n, \ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n ; y_n)$ est solution de l'équation (E).

b) En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.

3) En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1) Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2) Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que l'entier naturel $n = a^2 b^3$ est un nombre puissant.

3) Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors x^2-1 et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4) Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2 018.