Mini Bac 2 **Terminales S 1** Epreuve de Mathématiques

Le vendredi 14 février

durée : 4 heures

le candidat écrira dans l'entête de sa copie le bandeau suivant :

Ex 1 : / 4 points	**Ex 2 : / 6 points**	**Ex 3 : / 5 points**	**Ex 4 : / 5 points**

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il sera attribué 1 point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée

1) **Proposition 1 :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$

Faux contre exemple : $u_n = \frac{n-1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ donc suite croissante

2) g est la fonction définie sur I = $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par g(x) = $2x\ln(2x+1)$

Proposition 2 : Sur I, l'équation g(x) = $2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$

$2x\ln(2x+1) = 2x$ ssi $2x(\ln(2x+1)-1) = 0$ ssi $2x = 0$ ou $\ln(2x+1) = 1$ ssi x=0 ou $x = \frac{e-1}{2}$

Donc faux 2 solutions

Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $1+\ln(4)$

On dérive : $g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \frac{2}{2x+1} = 2\ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2) + \frac{2}{2} = \ln 4 + 1$ donc VRAI

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

P et P ′ sont les plans respectifs d'équations respectives $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$

Proposition 4 : Les plans P et P ′ sont perpendiculaires

Les plans seront perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux

$\vec{n}(2;3;-1)$ et $\vec{n'}(1;1;5)$

$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 2\times1 + 3\times1 - 1\times5 = 0$ d'où vecteurs orthogonaux et plans perpendiculaires

VRAI

Exercice 2 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x)=\ln x$

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur]0;+∞[la fonction g_a par $g_a(x)=ax^2$

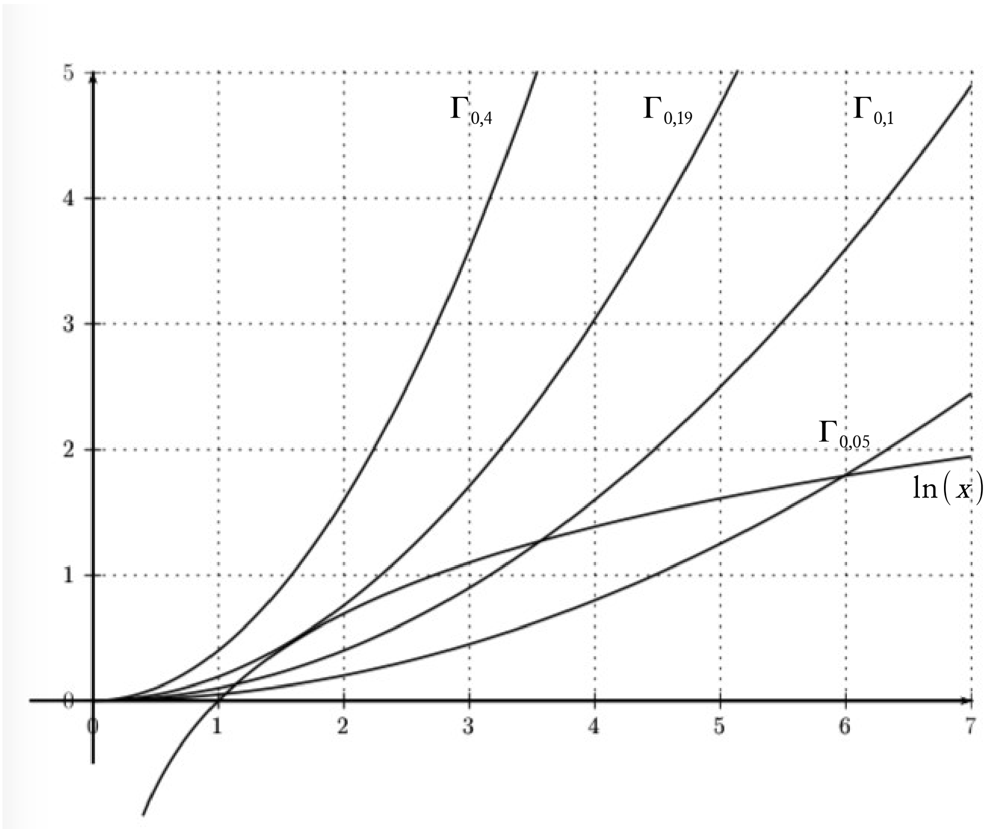
On note C la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes C et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a .

Partie A

On a construit ci-dessous (à rendre avec la copie) les courbes C , $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée



2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de C et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.
   pour a > 0,19 , aucun point d'intersection
   pour a = 0,19 , un point d'intersection
   pour a < 0,19 , deux points d'intersection

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle]0;+∞[par :

$$h_a(x)=\ln x-ax^2$$

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de C et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$
   M est sur C et Γ_a ssi $\ln(x)=ax^2$ ssi $\ln(x)-ax^2=0$ ssi $h_a(x)=0$

2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur]0;+∞[. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous. Justifier par le calcul le signe de $h_a'(x)$ pour x ∈]0;+∞[

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

$h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$.

Comme x > 0 le signe de h' est celui de $1-2ax^2$

$1-2ax^2=0$ ssi $x^2=\frac{1}{2a}$ ssi $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2a}}$

d'où comme un poly du second degré est du signe de a sauf entre ses racines , on obtient

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	

b) Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en +∞. En déduire la limite de la fonction h_a en +∞

On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. $h_a(x)=x\left(\frac{\ln(x)}{x}-ax\right)$

Comme a > 0 , $\lim\limits_{x\to+\infty} -ax = -\infty$ (car a > 0)d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ = - ∞ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x)$ = -∞

3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose a = 0,1

a) Justifier que dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution

$\frac{-1-\ln(2a)}{2} = \frac{-1-\ln(0{,}2)}{2} \approx 0{,}304 > 0$

La fonction $h_{0,1}$ est strict croissante et continue $sur \left]0;\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$ et on a $h_{0,1}(\left]0;\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right])=\left]-\infty;\frac{-1-\ln(0{,}2)}{2}\right]$

Comme 0 ∈ $\left]-\infty;\frac{-1-\ln(0{,}2)}{2}\right]$, d'après le th de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $h_{0,1}(x)=0$

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0{,}2}};+\infty\right[$

b) Quel est le nombre de points d'intersection de C et $\Gamma_{0,1}$

Il existe donc deux solutions à l'équation $h_{0,1}(x)=0$

4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose a = $\frac{1}{2e}$

a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$

$$h_{\frac{1}{2e}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\times\frac{1}{2e}}}\right) = ... = 0$$

b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes C et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier

La fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ admet donc un maximum sur]0;+∞[qui vaut 0 donc l'équation $h_{\frac{1}{2e}}(x)=0$ admet une unique solution en $x=\frac{1}{\sqrt{2e}}$. Ainsi C et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ se coupent en un seul point

5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles C et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier

aucune intersection ssi l'équation $h_a(x)=0$ n'a pas de solution ssi le maximum de h_a est strictement négatif ce qui donne : $\frac{-1-\ln(2a)}{2}<0$ $\quad -1-\ln(2a)<0$ $\quad \ln(2a)>-1$ $\quad a>\frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$

Exercice 3 (5 points):

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].

La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

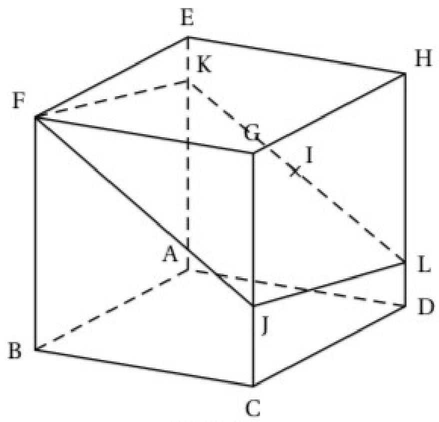


Figure 1

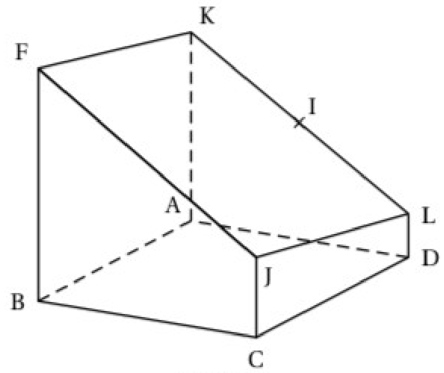


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

On a donc $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante .

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{2}{5}\right)$

1) Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

I est le centre de ADHE donc le milieu de [DE] donc $\mathrm{I}\left(\frac{x_{\mathrm{D}}+x_{\mathrm{E}}}{2};\frac{y_{\mathrm{D}}+y_{\mathrm{E}}}{2};\frac{z_{\mathrm{D}}+z_{\mathrm{E}}}{2}\right)$ ce qui donne

$\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

2) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ)

$\mathrm{F}(1;0;1)$

Un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Démontrons donc que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{FI}}\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\left(0;1;-\frac{3}{5}\right)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FI}} = -1\times-1+3\times\frac{1}{2}+5\times\frac{-1}{2} = 1+\frac{3}{2}-\frac{5}{2} = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}} = -1\times0+3\times1+5\times\left(\frac{-3}{5}\right) = 3-3 = 0$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (FIJ)

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est $-x+3y+5z-4=0$

Une équation de (FIJ) est donc de la forme avec le vecteur normal $\vec{n}$: $-x+3y+5z+d=0$

On utilise alors le point F de ce plan pour trouver d :

$-x_{\mathrm{F}}+3y_{\mathrm{F}}+5z_{\mathrm{F}}+d=0$ ce qui donne $-1+3\times0+5\times1+d=0$ cad $d=-4$

3) Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d

un vecteur directeur de d est un vecteur normal du plan donc $\vec{n}$ est directeur de d d'où l'équation :

$\begin{cases}x=1-t\\y=3t\\z=5t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

b) On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).

Démontrer que $\mathrm{M}\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$

M est sur d donc ses coordonnées sont de la forme $\mathrm{M}(1-t;3t;5t)$ et M est sur le plan (FIJ) donc

$-x_{\mathrm{M}}+3y_{\mathrm{M}}+5z_{\mathrm{M}}-4=0$ ce qui donne

$-(1-t)+3\times3t+5\times5t-4=0$

...

$t = \frac{1}{7}$ d'où $\mathrm{M}\left(1-\frac{1}{7};3\times\frac{1}{7};5\times\frac{1}{7}\right)$

cad $\mathrm{M}\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$

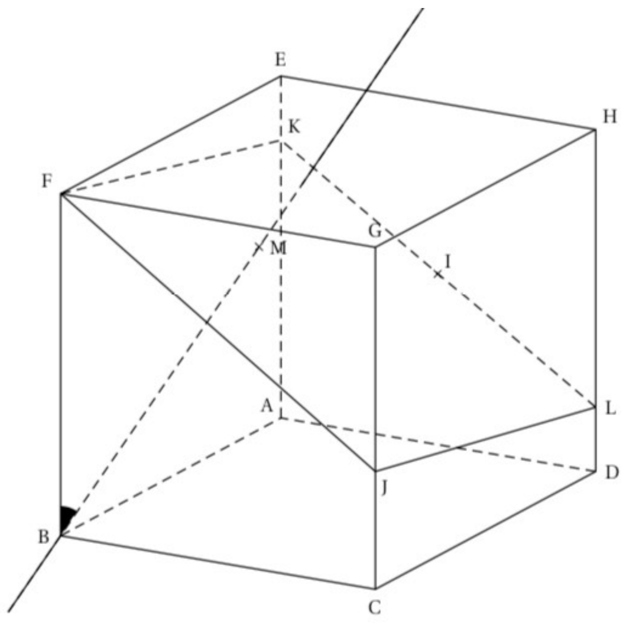


Figure 1

4) a) Calculer $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BM}\left(\frac{-1}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$ et $\overrightarrow{BF}$ $(0;0;1)$

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = \frac{5}{7}$

b) En déduire une valeur approchée au degré prés de l'angle $\widehat{MBF}$.

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = BM\times BF\times\cos(MBF)$

$BM^2=\left(\frac{-1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{35}{49}$ et $BF=1$ d'où

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = \frac{\sqrt{35}}{7}\cos(MBF) = \frac{5}{7}$ d'où $\cos(MBF)=\frac{5}{\sqrt{35}}$ donc $\widehat{MBF} = 32°$

Partie B

Dans cette partie , J est un point quelconque du segment [CG]. Ses coordonnées sont donc $(1;1;a)$ où a est un réel de l'intervalle $[0;1]$

1) Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
Un plan coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles ainsi le plan (FIJ) coupe les plans (BCGF) et (ADHE) selon deux droites parallèles donc (FJ) // (KL)
De même on a : (FK) // (JL) .
La section du cube par le plan (FIJ) est donc le quadrilatère (FJLK) donc les côtés opposés sont parallèles , c'est un parallélogramme

2) On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$

Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?
Losange ssi deux côtés consécutifs égaux FJ=JL

$\overrightarrow{FJ}$ $(0;1;a-1)$ donc $FJ^2 = 1+(a-1)^2 = a^2-2a+2$

$\overrightarrow{JL}$ $\left(-1;0;-\frac{a}{2}\right)$ donc $JL^2=1+\frac{a^2}{4}$

$FJ^2=JL^2$ donne $a^2-2a+2=1+\frac{a^2}{4}$

$4a^2-8a+8=4+a^2$

$3a^2-8a+4=0$

$\Delta = 16 > 0$ deux solutions

$a_1=\frac{2}{3}$ ou $a_2=2$

or a est dans [0;1] donc $a=\frac{2}{3}$

Exercice 4 (5 points): **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}$

Partie A : Conjectures

	A	B
1	n	un
2	0	1
3	1	0,1111111111
4	2	0,0136986301
5	3	0,0017094017
6	4	0,0002136296
7	5	0,000026703
8	6	3,33786169904E-006
9	7	4,17232538297E-007
10	8	5,21540645670E-008
11	9	6,51925802838E-009
12	10	8,14907252883E-010

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées avec un tableur dont voici une capture d'écran :

1) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers la bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?

B3 = B2/(B2+8)

2) Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

suite décroissante

3) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

4) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_{30}

u = 1
pour i allant de 1 à 30
    u prend la valeur u/(u+8)
Afficher u

Partie B : Etude générale

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n>0$

trop Facile

2) Etudier les variations de la suite (u_n).

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n = \frac{u_n-u_n^2-8u_n}{u_n} = \frac{-u_n^2-7u_n}{u_n} .$$

On sait que u_n est strictement positif donc $-u_n^2-7u_n$ est négatif d'où $u_{n+1}-u_n<0$ cad $u_{n+1}<u_n$ et la suite est décroissante

3) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier

suite décroissante minorée par 0 donc convergence

Partie C

On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n $v_n=1+\frac{7}{u_n}$

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8

$v_{n+1}=1+\frac{7}{u_{n+1}} = 1+\frac{7(u_n+8)}{u_n} = 1+7+\frac{56}{u_n} = 8\left(1+\frac{7}{u_n}\right) = 8v_n$ donc suite géométrique de raison 8 et de premier terme $v_0=1+\frac{7}{u_0}=8$

2) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$

$v_n=v_0\times q^n = 8\times 8^n = 8^{n+1}$

donc $1+\frac{7}{u_n}=8^{n+1}$ $\quad \frac{7}{u_n}=8^{n+1}-1$ $\quad u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$ car $8 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 8^{n+1}-1=+\infty$ et par inverse $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

4) On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n<10^{-18}$ Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$, tout intervalle contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang il existe donc un rang n_0 à partir duquel $u_n \in \left]0;10^{-18}\right[$

$\frac{7}{8^{n+1}-1}<10^{-18}$

$\frac{8^{n+1}-1}{7}>\frac{1}{10^{-18}}$

$8^{n+1}-1>7\times 10^{18}$

$8^{n+1}>7\times 10^{18}+1$

$(n+1)\ln(8)>\ln(7\times 10^{18}+1)$

$n>\frac{\ln(7\times 10^{18}+1)}{\ln 8}-1$

n > 19,86 donc à partir du rang 20