Mini Bac 2 **Terminales S 1** Epreuve de Mathématiques

Le vendredi 14 février
durée : 4 heures

le candidat écrira dans l'entête de sa copie le bandeau suivant :

Ex 1 : / 4 points	Ex 2 : / 6 points	Ex 3 : / 5 points	Ex 4 : / 5 points

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il sera attribué 1 point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée

1) **Proposition 1 :** Toute suite croissante tend vers +∞
2) g est la fonction définie sur I = $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par g(x) = $2x\ln(2x+1)$

   Proposition 2 : Sur I, l'équation g(x) = $2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$

   Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $1+\ln(4)$
3) L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)
   P et P' sont les plans respectifs d'équations respectives $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$
   Proposition 4 : Les plans P et P' sont perpendiculaires

Exercice 2 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x)=\ln x$

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur]0;+∞[la fonction g_a par $g_a(x)=ax^2$

On note C la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes C et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a .

Partie A

On a construit ci-dessous (à rendre avec la copie) les courbes C , $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée
2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de C et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle]0;+∞[par :

$$h_a(x)=\ln x-ax^2$$

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de C et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$

2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur]0;+∞[. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous. Justifier par le calcul le signe de $h_a'(x)$ pour x ∈]0;+∞[

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

b) Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en +∞. En déduire la limite de la fonction h_a en +∞

On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose a = 0,1

a) Justifier que dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}};+\infty\right[$

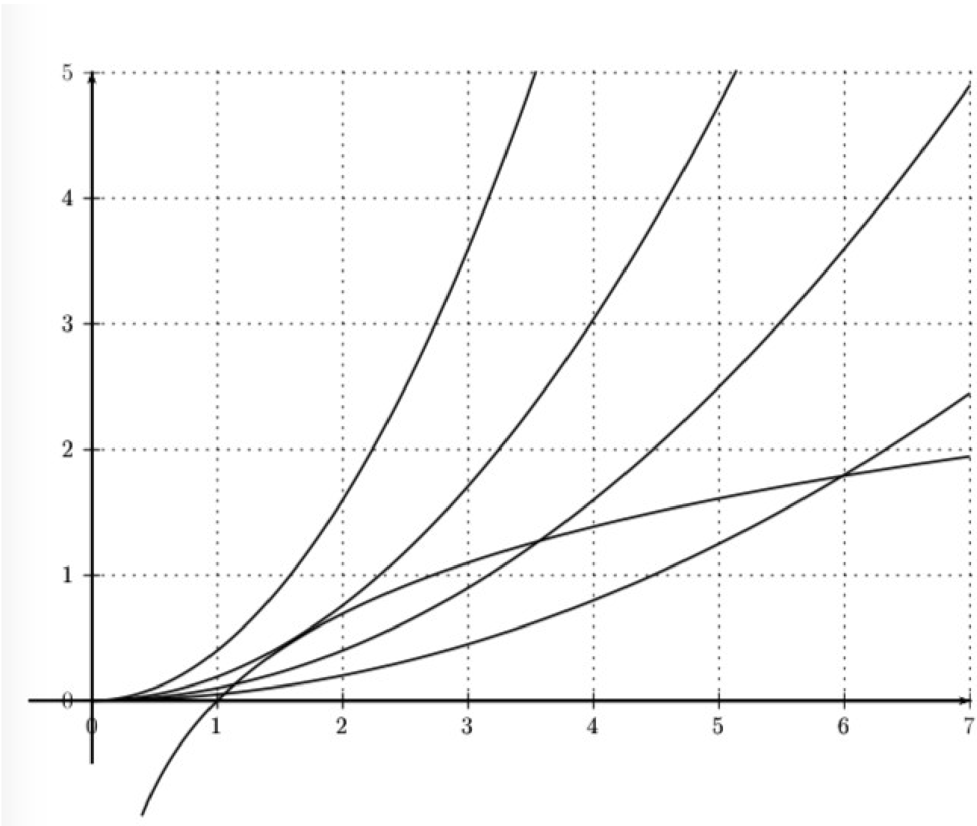
b) Quel est le nombre de points d'intersection de C et $\Gamma_{0,1}$

4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose a = $\frac{1}{2\mathrm{e}}$

a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$

b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes C et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier

5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles C et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier



Exercice 3 (5 points):

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].

La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

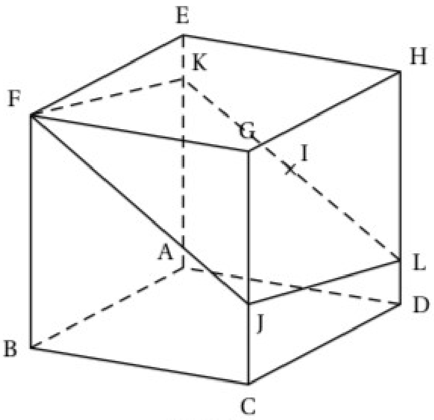


Figure 1

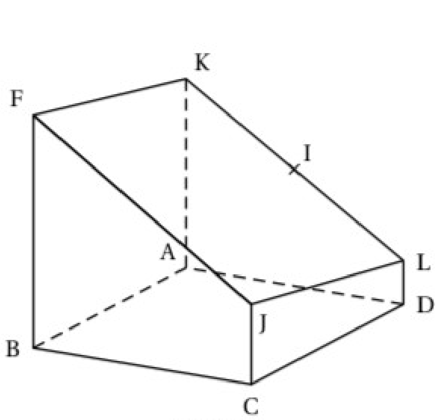


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

On a donc $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante .

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{2}{5}\right)$

1) Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

2) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ $\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ)

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est $-x+3y+5z-4=0$

3) Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d

b) On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).

Démontrer que $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$

4) a) Calculer $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}$

b) En déduire une valeur approchée au degré prés de l'angle $\widehat{MBF}$.

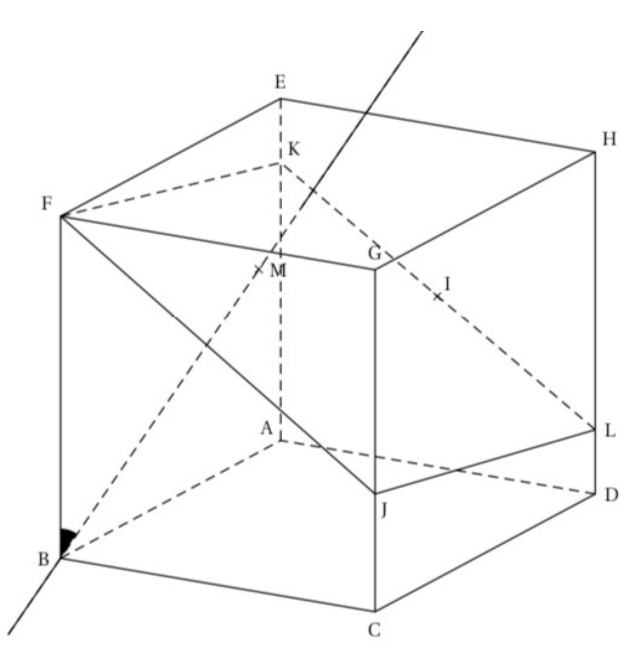


Figure 1

M. Philippe   Mme Hamdani

Partie B

Dans cette partie , J est un point quelconque du segment [CG]. Ses coordonnées sont donc $(1;1;a)$ où a est un réel de l'intervalle $[0;1]$

1) Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
2) On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$

   Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Exercice 4 (5 points): Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées avec un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	un
2	0	1
3	1	0,1111111111
4	2	0,0136986301
5	3	0,0017094017
6	4	0,0002136296
7	5	0,000026703
8	6	3,33786169904E-006
9	7	4,17232538297E-007
10	8	5,21540645670E-008
11	9	6,51925802838E-009
12	10	8,14907252883E-010

1) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers la bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2) Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_{30}

Partie B : Etude générale

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n>0$
2) Etudier les variations de la suite (u_n).
3) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier

Partie C

On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n $v_n=1+\frac{7}{u_n}$

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8
2) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$
3) Déterminer la limite de la suite (u_n)
4) On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n<10^{-18}$ Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur