Partie A

1) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1+i$

$|-1+i| = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos(\alpha)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

b) A quelle condition sur l'entier naturel n, le nombre $(-1+i)^{2n}$ est-il un nombre réel strictement positif ?

$(-1+i)^{2n} = ((-1+i)^2)^n = (-2i)^n$ donc si n est pair , n = 2k cad $(-2i)^{2k} = ((-2i)^2)^k$ ^=

$(-4)^k$ donc pour être *positif* on doit encore avoir k pair d'où n doit être multiple de 4

2) a) Déterminer la forme exponentielle de a = $-\sqrt{3}+i$

$|a| = 2$ argument = $\dfrac{5\pi}{6}$ donc a = $2\ e^{\frac{5i\pi}{6}}$

b) Est-il vrai qu'un argument de a^8 est égal à $\frac{\pi}{3}$? Justifier

arg a^8 = 8 arg a = $\dfrac{8\times5\pi}{6} = \dfrac{20\pi}{3}$ et $\dfrac{20\pi}{3}-6\pi = \dfrac{2\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{3}$ donc faux

c) Démontrer que a^{2013} est un imaginaire pur.

Arg a^{2013} = 2013 arg a = $\dfrac{2013\times5\pi}{6}$ = 3355 $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3355\pi}{2}-839\times2\pi = \dfrac{-\pi}{2}$ donc imaginaire pur

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 2 cm

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-2i)(z^2+2z\sqrt{3}+4)=0$

z = 2i ou $z^2+2z\sqrt{3}+4=0$

$\Delta = 12-16=-4 < 0$ donc deux solutions

$z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}-2i}{2}$ et $z_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{2}$

$z_1=-\sqrt{3}-i$ $\qquad z_2=-\sqrt{3}+i$

2) On considère les points A et B du plan, d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3}+i$ et $z_B=\overline{z_A}=-\sqrt{3}-i$

a) **Donner** l'écriture de z_A et de z_B sous forme exponentielle.

$z_A = 2\ e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et comme z_B est le conjugué de z_A on a : $z_B = 2\ e^{\frac{-5i\pi}{6}}$

b) Justifier que A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O dont on déterminera le rayon. Construire Γ puis placer précisément les points A et B dans un repère (laisser les traits de construction).

$|z_A|=|z_B|=2$ Donc A et B sont sur le cercle de centre O de rayon 2

3) On considère l'équation d'inconnue z : $2z-4i=iz+2$

a) Résoudre cette équation

$2z-iz=2+4i$

$z = \dfrac{2+4i}{2-i} = \dfrac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{4+2i+8i-4}{5} = 2i$

b) On note C le point d'affixe 2i . Placer C sur la figure

c) Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

$OC = |z_C| = 2$ OB = 2 AC = $|2i+\sqrt{3}-i| = |\sqrt{3}+i| = 2$ et AB = $|z_B - z_A| = |-2i| = 2$

d'où le losange

4) a) Ecrire le complexe $Z = \dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i}$ sous forme exponentielle

$$Z = \frac{2e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}} = e^{\frac{-10i\pi}{6}} = e^{\frac{-5i\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) En déduire l'écriture algébrique du complexe Z^9

$$Z^9 = e^{\frac{-5\pi}{3}\times 9} = e^{-15\pi} = \cos(-15\pi) + i\sin(-15\pi) = -1$$

5) Déterminer et construire (E) ensemble des points M d'affixe z du plan tels que :

$|z - 2i| = |-\sqrt{3}+i|$

$|z_M - z_C| = 2$

$CM = 2$

cercle de centre C de rayon 2