TS INTEGRALES QCM1

QUESTION 1

- Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$ donc on a comme première possibilité $F(x)=e^{x}-e^{-x}$
- Or $e^{x}-e^{-x} = e^{x}-\frac{1}{e^{x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}$

  donc deuxième réponse possible

Question 1 :

$$f(x)=e^{x}+e^{-x}$$

Une primitive de la fonction f peut être :

- ☐ $F(x)=e^{x}-e^{-x}$
- ☐ $F(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}$
- ☐ $F(x)=e^{x}+e^{-x}$

QUESTION 2

Sur $[-3;0]$, la fonction f est négative donc par positivité des intégrales , $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$ est aussi négative et donc comme $\int_{0}^{-3} f(x)\,dx = -\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$ la réponse est positif

Question 2:

$$\int_{0}^{-3} f(x)dx$$

Quel et le signe de cette intégrale où f est la fonction ayant le tableau de variation ci-dessous ?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	-3	↗	0	↗	1	↘	$0,5$

- ○ positif
- ○ négatif
- ○ on ne peut pas savoir

QUESTION 3

Sur l'intervalle [-2;2], la fonction f est négative puis positive donc il est impossible de savoir le signe de l'intégrale proposée

Question 3 : En utilisant le tableau de variation de la fonction f précédente, que peut-on dire du signe de l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

- ○ positive
- ○ négative
- ○ on ne peut pas savoir

QUESTION 4

Il ne faut pas oublier la valeur absolue dans la primitive .

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_{-3}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|-1|-\frac{1}{2}\ln|-7|$$

$$= -\frac{\ln 7}{2}$$

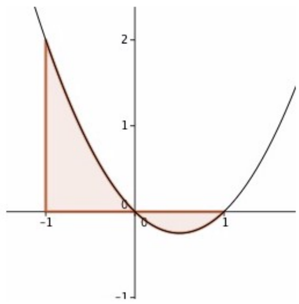
Question 4 : Que vaut l'intégrale suivante :

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{2x-1}dx$$

- ○ $\frac{1}{2}ln(2x-1)$
- ○ $\frac{ln5}{2}$
- ○ On ne peut pas la calculer
- ○ $-\frac{ln7}{2}$

QUESTION 5

Question 5 : On a représenté ci-dessous la fonction f définie par f(x) = x(x−1).
L'aire de la surface colorée en unités d'aire est de :



L'aire a calculé est à décomposer en deux parties selon que la fonction est positive ou négative :

Aire = $\int_{-1}^{0} x(x-1)\,\mathrm{d}x$ - $\int_{0}^{1} x(x-1)\,\mathrm{d}x$

pour f(x) = x^2-x sa primitive est $\mathrm{F}(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$

d'où

Aire= $[\mathrm{F}(x)]_{-1}^{0}$ - $[\mathrm{F}(x)]_{0}^{1} = 0-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-0\right)$

= 5/6+1/6 = 6/6 = 1

QUESTION 6

Question 6 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = xe^x$$

Une primitive de la fonction f est :

- $(x-1)e^x$
- $2e^x$
- on ne peut pas la calculer

En dérivant les deux fonctions proposées, on trouve la première proposition

QUESTION 7

Pour les deux questions suivantes, on considère une fonction f continue sur [0;1] et (Un) la suite définie par :

$$U_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$$

Question 7 : Si f est positive sur [0;1] alors la suite (Un) est :

- croissante
- décroissante
- on ne peut pas savoir

Question 8 : Si f(t) = − 1 alors la suite (Un) est :

- négative
- converge vers 0
- diverge vers +∞

$$U_{n+1}-Un = \int_0^1 t^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t^{n+1} f(t)-t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t^n f(t)(t-1)\,\mathrm{d}x$$

Sur [0;1], le signe de $t^n f(t)$ est positif donc le signe de la $U_{n+1}-\mathrm{U}_n$ est celui de $t-1$ qui est négatif .
Donc par positivité des intégrales, on a une intégrale négative d'où $\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{U}_n \le 0$

$\mathrm{U}_{n+1} \le \mathrm{U}_n$

La suite est décroissante

QUESTION 8

$$\mathrm{U}_n = \int_0^1 -t^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1}+0 = -\frac{1}{n+1} \quad \text{d'où} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = 0$$

Comme n est un entier naturel, la suite est donc négative et converge vers 0

QUESTION 9

On utilise la relation de Chasles :

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} x+1\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} + \left[\ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= 0-\left(\frac{1}{2}-1\right) + \ln 2-\ln 1 \\
&= \frac{1}{2}+\ln 2
\end{aligned}
$$

Question 9 : Soit f la fonction définie par :

$$
f(x) = \{ \begin{matrix} x+1 & si -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & si 0 \leq x \leq 1 \end{matrix}
$$

Que vaut l'intégrale de f sur [−1;1] ? Quelle propriété des intégrales utilise-t-on ?

QUESTION 10

Question 10 : La suite (Un) définie ci-dessus est-elle convergente? Si oui quelle est sa limite ?

$$u_n = \int_{ln2}^{n} \frac{1}{e^x} dx$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\ln 2}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\ln 2}^{n} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{\ln 2}^{n} \\
&= -\mathrm{e}^{-n}-\left(-\mathrm{e}^{-\ln 2}\right) \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}^n}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ donc par inverse , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Donc convergence vers $\frac{1}{2}$