DS Terminales S1

Le Lundi 2 décembre 2019

<u>Exercice 1 :</u>

1) Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $e^{3x-1}=1 \;=\; e^0$

$3x-1=0$

x = $\frac{1}{3}$

b) $e^{3-x}\times e^{2x-1}=(e^{5x+1})^2$

$e^{3-x+2x-1}=e^{10x+2}$

$x+2=10x+2$

$-9x=0$ donc x = 0

2) Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante : $e^{x^2-x}<e$

$x^2-x<1$ donc $x^2-x-1<0$

$\Delta=5$ >0 donc deux racines $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

un poly du second degré est du signe de a sauf entre racines donc S = $]x_1;x_2[$

3) Calculer la dérivée de la fonction f définie par f(x) = $\frac{3}{1+e^{-2x}}$

$$f'(x)=-\frac{3\times(-2)\times e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} \;=\; \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

<u>Exercice 3 :</u>

Soit f la fonction dérivable définie sur]0;+∞[par f(x) = $e^x+\frac{1}{x}$

1) Etude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable et définie sur [0;+∞[par $g(x)=x^2e^x-1$

Etudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en +∞. On dressera le tableau de variation.

$g'(x)=2xe^x+x^2e^x \;=\; (2x+x^2)e^x$

Comme on travaille uniquement chez les positifs, g'(x) est positif et g est donc croissante

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ =+∞ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ =+∞ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x$ =+∞ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ =+∞

$g(0)=-1$

x	0	+∞
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	+∞

b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à [0;+∞[tel que g(a) = 0

g est continue et strictement croissante sur [0;+∞[et on a $g([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$

Comme 0 ∈ [–1;+∞[, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel a ∈ [0;+∞[tel que $g(a)=0$

c) Donner un encadrement de a à 10^{-2}

La calculatrice donne 0,703 < a < 0,704

d) Déterminer le signe de g sur [0;+∞[

g est continue croissante sur [0;+∞[et s'annule en a donc :

pour tout x ∈ [0;a], g(x) ≤ 0

pour tout x ∈ [a;+∞[, g(x) ≥ 0

2) Etude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en +∞

$\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) On note $f\,'$ la fonction dérivée de f sur l'intervalle]0;+∞[

Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f\,'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$f\,'(x)=e^x-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

c) En déduire le sens de variation de la fonction f

Pour tout x ∈ [0;+∞[, x^2 est positif donc le signe de $f\,'$ est celui de g(x)

D'après la question 1) d) on connait le signe de g donc :

pour tout x ∈ [0;a], f'(x) ≤ 0 et f est décroissante

pour tout x ∈ [a;+∞[, f'(x) ≥ 0 et f est croissante

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le réel : $m=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$

la fonction f est décroissante puis croissante donc elle admet un minimum en x = a qui vaut $f(a)=e^a+\frac{1}{a}$. Or a est le réel solution de l'équation g(a)=a donc on a $a^2e^a-1=0$ ce qui donne $e^a=\frac{1}{a^2}$ d'où $f(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$