DS 2 Terminale S1

Le mardi 1 octobre 2019

Exercice 1 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes après avoir préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité :

$f(x)=\sqrt{3x^2-3x-6}$ $\qquad$ g(x) = $(x^2+2x-9)^4$ $\qquad$ h(x) = $\dfrac{5}{(4x-3)^3}$

f(x) existe ssi $3x^2-3x-6\geq 0$

$\Delta=9+72=81>0$ donc deux racines $x_1=-1$ et $x_2=2$

on a donc D_f =]-∞ ;-1] ∪ [2;+∞[

on retire alors -1 et 2 pour l'ensemble de dérivabilité

$$f'(x)=\frac{6x-3}{2\sqrt{3x^2-3x-6}}$$

g est un polynôme donc défini et dérivable sur ℝ .

g(x) = u^4 donc $g'(x)=4u'u$ = $4(2x+2)(x^2+2x-9)^3$

h est une fonction rationnelle donc définie et dérivable sur son ensemble de définition qui est ℝ \ { ¾ }

$h(x)=5(4x-3)^{-3}$ donc $h'(x)=5\times(-3)\times4\times(4x-3)^{-4}$ = $\dfrac{-60}{(4x-3)^4}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(x-3)\sqrt{x^2+1}$. On note C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Justifier que f est dérivable sur ℝ et démontrer que $f'(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

   Pour tout x ∈ ℝ , $x^2+1>0$ donc f est donc un produit de fonctions dérivable sur ℝ donc $D_f=D_{f'}$ = ℝ .

   $f'(x)=1\times\sqrt{x^2+1}+(x-3)\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ = ... = $\dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Dresser en justifiant le tableau de variation de la fonction f

   pour tout x ∈ ℝ , $\sqrt{x^2+1}>0$ donc le signe de f' est celui de $2x^2-3x+1$

   Δ = $9-8=1$ > 0 donc deux racines $x_1=1$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$ on a donc

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{-5\sqrt{5}}{4}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

3) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et étudier la position de C par rapport à cette tangente

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc avec $f'(0)=1$ et $f(0)=-3$ on obtient comme équation $y=x-3$

position relative : on étudie le signe de $f(x)-(x-3)$

$$f(x)-(x-3)=(x-3)(\sqrt{x^2+1}-1) = \frac{(x-3)(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{(x-3)x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

le signe est donc celui de $x-3$ d'où

pour tout x ∈]-∞;3], $x-3<0$ donc $f(x)<x-3$ et Cf est en dessous de la tangente

pour tout x ∈]-3;+∞[], $x-3>0$ donc $f(x)>x-3$ et Cf est au dessus de la tangente

<u>**Exercice 3 :**</u>

Soit f la fonction définie sur I = $[-\pi;+\pi]$ par f(x) = $\sin(x)(1+\cos(x))$

1) Etudier la parité de la fonction f
   le domaine est sym par rapport à zéro donc
   $f(-x)=\sin(-x)(1+\cos(-x))$ or $\sin(-x)=-\sin x$ et $\cos(-x)=\cos x$ on obtient donc
   $f(-x)=-f(x)$ et la fonction est impaire .

2) Démontrer que f est périodique
   $f(x+2\pi)=\ldots=f(x)$ facile donc périodique période 2π avec un D_f = $\mathbb{R}$.

3) a) Justifier que f est dérivable sur I et que $f'(x)=2\cos^2(x)+\cos(x)-1$
   f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x)=\cos(x)(1+\cos(x))+\sin(x)(-\sin(x)) = \cos(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)$
   or $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$ d'où la réponse
   b) Factoriser $2X^2+X-1$ et en déduire que $f'(x)=(\cos(x)+1)(2\cos(x)-1)$
   $2X^2+X-1=2(X+1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ d'où $f'(x)=2(\cos(x)+1)\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)$ =
   $(\cos(x)+1)(2\cos(x)-1)$

4) a) Justifier que pour tout x ∈ I, $\cos(x)+1\geq 0$
   pour tout x, $-1\leq\cos(x)\leq 1$ donc $0\leq\cos(x)+1\leq 2$ cqfd

b) Résoudre sur I l'inéquation $2\cos(x)-1 \geq 0$

$\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ donc avec un cercle trigo sur I, S = $\left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

c) Dresser alors le tableau de signe de f' et en déduire les variations de f

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{}}{4}$	$\searrow$	0