DM7

1) a) $z^3+8=(z+2)(z^2+az+b)$

$= z^3+(2+a)z^2+(2a+b)+2b$

Par identification, il vient :

$\begin{cases} 2+a=0 \\ 2a+b=0 \\ 2b=8 \end{cases}$ cad $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$

b) $(z+2)(z^2-2z+4)=0$

$z=-2$ ou $z^2-2z+4=0$

$\Delta = 4-16=-12 <0$ donc deux solutions dans C .

$z_1=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}$ et $z_2=\frac{2-i\sqrt{12}}{2}$

$z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$

<u>Forme trigonométrique :</u>

$z=-2=2(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$

$z_1=1+i\sqrt{3}$

$|z_1|=2$

$\begin{cases} \cos(\alpha)=\frac{1}{2} \\ \sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\alpha=\frac{\pi}{3}$

d'où $z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

z_1 et z_2 étant conjugué, ils ont même module et des arguments opposés d'où

$z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2) a) Facile

b) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OB}) = -\arg(z)+\arg(z_2) = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OB};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OC}) = -\arg(z_2)+\arg(z_1) = \frac{+\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OC};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = -\arg(z_1)+\arg(z)=\frac{-\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$

$AB=|z_B-z_A| = |1-i\sqrt{3}+2| = |3-i\sqrt{3}| = \sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$AC=|z_C-z_A| = ... = 2\sqrt{3}$

$BC=|z_C-z_B| = |1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

d'où le triangle équilatéral

3) a) On veut AODL parallélogramme donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DL}$ Ces vecteurs étant égaux ils ont la

même affixe d'où avec $D\left(\frac{z_O+z_B}{2}\right)$ cad $D\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$:

$z_A-z_O=z_L-z_D$

$z_L=z_A+z_D = -2+\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$

b) $z_{\overrightarrow{OL}} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ donc $\overrightarrow{OL} \left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_{\overrightarrow{AL}} = z_L-z_A = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}-(-2) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ donc $\overrightarrow{AL} \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{AL} = xx'+yy' = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ = 0 donc les vecteurs sont orthogonaux

c) Le triangle OAL est donc rectangle en L . Les points OAL sont donc sur le cercle de diamètre l'hypoténuse de ce triangle c'est à dire [OA]