DM 6

Dans l'espace muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère l

$$A(2{,}0{,}0) \ , \ B(-1,\sqrt{3},0) \ \text{ et } \ C(-1,-\sqrt{3},0)$$

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre

$\overrightarrow{AB}$ $(-3;\sqrt{3};0)$ donc $AB=\sqrt{9+3+0} = \sqrt{12}$

$\overrightarrow{AC}$ $(-3;-\sqrt{3};0)$ donc AC = $\sqrt{9+3+0} = \sqrt{12}$

$\overrightarrow{BC}$ $(0;-2\sqrt{3};0)$ donc BC = $\sqrt{0+12+0} = \sqrt{12}$

le triangle est donc équilatéral.

Si O est le centre de ce triangle c'est le point d'intersection des médiatrices donc le centre du cercle circonscrit à ABC et on a donc $OA=OB=OC$

On calcule alors ces distance avec la formule et on trouve 2 donc OK

2) a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B

On cherche le plan médiateur du segment [AB]. Or $\overrightarrow{AB}$ $(-3;\sqrt{3};0)$ est alors un vecteur normal à ce plan , on a donc une équation de la forme $-3x+\sqrt{3}y+0z+d=0$.

Le point I milieu de [AB] fait partie de ce plan et a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

On a donc $-3x_I+\sqrt{3}y_I+d=0$ ce qui donne d = 0. Ce plan médiateur a donc pour équation : $-3x+\sqrt{3}y=0$

b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistant des points B et C

Même principe que pour le a) : l'équation du plan médiateur de [AC] est : $y=0$

c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistant des points A , B et C est l'axe (O , $\vec{k}$)

on cherche l'intersection des deux plans précédents : $\begin{cases} -3x+\sqrt{3}y=0 \\ y=0 \end{cases}$

Par addition il vient $-3x=0$ donc x = 0 . Ainsi les deux plans se coupent en $(0;0;z)$ il s'agit de l'axe (O ; $\vec{k}$)

3) Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculer ses coordonnées

Le tétraèdre doit être régulier donc D doit être équidistant de A , B et C d'où d'après la question précédente, D a des coordonnées de la forme $\mathrm{D}(0;0;z)$.

Comme AB=AC=BC= $\sqrt{12}$, il vient $\mathrm{AD}=\sqrt{12}$ ou encore $\mathrm{AD}^2=12$ donc

$(x_{\mathrm{D}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{A}})^2+(z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{A}})^2=12$

$4+0+z^2=12$

$z^2=8$ d'où comme z > 0 , z = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

4) Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ avec t ∈ [0;1].

a) Montrer que $\cos\widehat{\mathrm{AMB}} = \dfrac{2t^2-2t+1}{2(t^2-t+1)}$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a pour coordonnées $(1;\sqrt{3};2\sqrt{2})$ donc une représentation paramétrique

de (CD) est : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,t \\ z=2\sqrt{2}\,t \end{cases}$.

M étant sur (CD) il existe t tel que $\mathrm{M}(-1+t;-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,t;2\sqrt{2}\,t)$

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ ($2-(-1+t);0-(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,t);0-(2\sqrt{2}\,t)$

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ $(3-t;\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t;-2\sqrt{2}\,t)$ donc $\mathrm{MA}^2=(3-t)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t)^2+(-2\sqrt{2}\,t)^2$

$\mathrm{MA}^2=12-12t+12t^2$

De même, on a : $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ $(-t;2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t;-2\sqrt{2}\,t)$

d'où : $\mathrm{MB}^2=12-12t+12t^2$

Calculons alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}\times\cos(\mathrm{AMB})=xx'+yy'+zz'$

$(12-12t+12t^2)\cos(\mathrm{AMB})=(3-t)\times(-t)+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t)+(-2\sqrt{2}\,t)^2$

$$\cos(\mathrm{AMB}) = \frac{12t^2-12t+6}{12-12t+12t^2} = \frac{2t^2-2t+1}{2t^2-2t+2} = \frac{2t^2-2t+1}{2(t^2-t+1)}$$

b) On définit la fonction f par la relation : $f(t)=\dfrac{2t^2-2t+1}{2(t^2-t+1)}$

Etudier les variations de la fonction f

t^2-t+1 : $\Delta=-3<0$ aucune racine donc fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$f'(t)=\dfrac{4t-2}{(2(t^2-t+1))^2}$ le signe est celui de $4t-2$ d'où

pour tout t $\geq\dfrac{1}{2}$, $f'(t)\geq0$ et f croissante

pour tout t ≤ $\dfrac{1}{2}$, $f'(t)\leq0$ et f décroissante

c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum

Sur [0;180°], la fonction cosinus est décroissante ainsi, plus $\widehat{AMB}$ est grand plus cos(AMB) est petit ainsi, on prend le minimum de la fonction f

minimum en $t=\frac{1}{2}$ pour la fonction f avec $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$ d'où $M\left(\frac{-1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right)$

d) Quelle est la valeur de ce maximum ?

$\cos(AMB)=\frac{1}{3}$ donne alors $\widehat{AMB}$ = 70,5°