DM 6

Dans l'espace muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère les points :

$$A(2{,}0{,}0)\ ,\ B(-1,\sqrt{3},0)\ \text{ et }\ C(-1,-\sqrt{3},0)$$

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre
2) a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B

   b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistant des points B et C

   c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistant des points A , B et C est l'axe (O , $\vec{k}$
3) Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnées est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculer ses coordonnées
4) Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\overrightarrow{CM}=t\,\overrightarrow{CD}$ avec t ∈ [0;1].

   a) Montrer que $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{2t^2-2t+1}{2(t^2-t+1)}$

   (aide : prendre le point C et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ pour écrire une représentation paramétrique de la droite (CD))

   b) On définit la fonction f par la relation : $f(t)=\dfrac{2t^2-2t+1}{2(t^2-t+1)}$

   Etudier les variations de la fonction f

   c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum

   d) Quelle est la valeur de ce maximum ?