DM Terminales S

Préambule Déterminer selon les valeurs de x, le signe de A = x^3-1

$$A=(x-1)(x^2+x+1)$$

x^2+x+1 $\Delta=-3<0$ donc le trinôme est du signe de a = 1 donc strictement positif

Le signe de A est donc celui de $x-1$ d'où positif sur [1;+∞[et négatif sinon

I- On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=x\,e^{-x^2}$. On appelle C_1 sa courbe représentative

a) Etudier la parité de f_1

D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x)=-x\,e^{-(-x^2)}=-x\,e^{-x^2} = -f(x)$ donc f est impaire

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f_1

f_1 est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_1'(x) = 1\times e^{-x^2}+x\times(-2x\,e^{-x^2}) = e^{-x^2}(1-2x^2)$

Pour tout x, e^{-x^2} est positif donc le signe de f_1' est celui de $1-2x^2$ qui est un poly du second degré de racines $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ il est donc du signe de a sauf entre ses racines c'est à dire :

pour tout x ∈ $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; f_1' est positive et f_1' est croissante

pour tout x ap $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ f_1' est négative et f_1 décroissante

c) Calculer la limite de f_1 en +∞ (on pourra poser X = x^2)

$f_1(x)=x\,e^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\sqrt{X}}{e^X} = \frac{1}{\sqrt{X}}\times\frac{X}{e^X}$ car $\sqrt{X} = \frac{X}{\sqrt{X}}$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{X}} = 0$ or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X} = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$ d'où par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$

d) On appelle Δ la droite d'équation y = x . Etudier la position de C_1 par rapport à Δ

Etudions le signe la différence B = $f_1(x)-x = x(e^{-x^2}-1)$

$e^{-x^2}-1>0$ donne $e^{-x^2}>1 = e^0$ d'où $-x^2>0$ ou encore $x^2<0$ ce qui est impossible d'où pour tout x , $e^{-x^2}-1\leq 0$. Le signe de B est donc celui de $-x$ donc positif sur les positifs et négatif sur les négatifs ainsi sur $\mathbb{R}^-$, C_1 est au dessus de Δ et sur $\mathbb{R}^+$, C_1 est en dessous de Δ

e) Tracer C_1 et Δ sur une feuille de papier millimétré (unité graphique 5 cm)

II- On considère maintenant f_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x)=x^4 e^{-x^2}$ de courbe représentative C_4

a) Etudier la parité de f_4

Ici $f_4(-x)=f_4(x)$ donc f_4 est paire

b) Déterminer le sens de variation de f_4

$f_4'(x) = 4x^3 e^{-x^2}+x^4(-2x e^{-x^2}) = e^{-x^2}(4x^3-2x^5) = x^3\times e^{-x^2}(4-2x^2)$

$4-2x^2 = 0$ pour $x^2=2$ donc $x=\pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de x^3		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de $4-2x^2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
signe de e^{-x^2}		$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de $f_4'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Etc..... D'où les variations de f_4

b) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_4

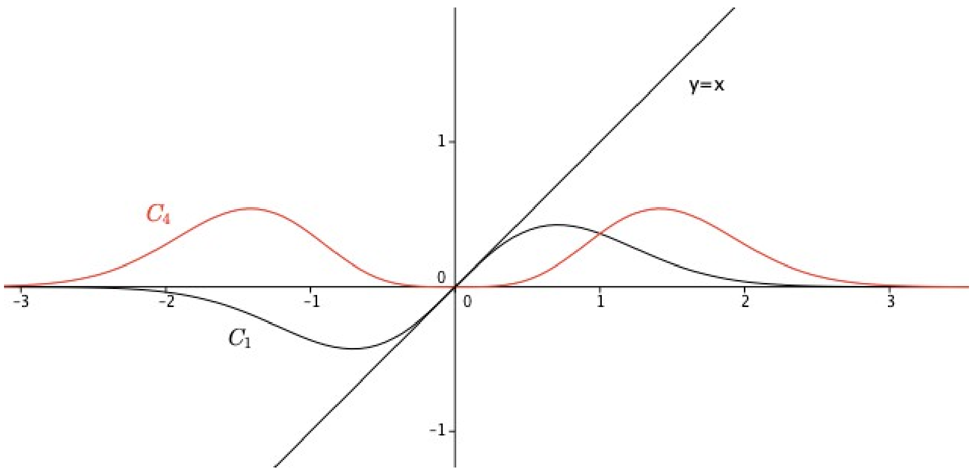
Etudions le signe de la différence $D = f_4(x)-f_1(x)=x\times e^{-x^2}(x^3-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de x^3-1		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
signe de e^{-x^2}		$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de D		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur]-∞;0[∪]1;+∞[, f_4-f_1 positif donc C_4 au dessus de C_1

Sur [0;1], f_4-f_1 négatif donc C_4 en dessous de C_1

c) Tracer C_4 dans le même repère que C_1



III- On considère maintenant f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^n e^{-x^2}$ de courbe représentative C_n.

a) Montrer que pour tout entier n ≥ 1 , C_n admet un maximum. On notera S_n ce maximum et on précisera ses coordonnées. On placera S_2, S_3 et S_4 sur la figure

$$f_n'(x)=n\times x^{n-1}e^{-x^2}+x^n\left(-2xe^{-x^2}\right) = x^{n-1}\times e^{-x^2}\left(n-2x^2\right)$$

deux cas à envisager :

n pair

$n-1$ est donc impair

x^{n-1} est du signe de x

n impair

$n-1$ est donc pair

x^{n-1} est positif

$n-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{n}{2}}$

$n-2x^2$ est donc du signe de a sauf entre ses racines d'où les tableaux suivants :

cas n pair

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
signe de x^{n-1}		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de $n-2x^2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
signe de f_n'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	0

Comme f_n est pair on a $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)=f_n\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$ qui est le maximum de f_n

Cas n impair

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
signe de x^{n-1}		$+$	$\vdots$	$+$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
signe de $n-2x^2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
signe de f_n'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

max en $\sqrt{\frac{n}{2}}$

b) Montrer que pour tout n, C_n passe par S_2 .

S_2 a pour coordonnées $\left(\sqrt{\frac{2}{2}};f_2\left(\sqrt{\frac{2}{2}}\right)\right)$ = (1 ; $f_2(1)$) = (1 ; $\frac{1}{e}$)

$f_n(1)=1^n e^{-(1)^2}$ = $\frac{1}{e}$ d'où la réponse