Correction DM 4

Problème 1

Les dix millièmes d'une solution de l'équation

$x + \cos x = 0$

vous donneront le premier chiffre

- On étudie la fonction f définie sur ℝ par f(x) = x + cos x

  Cette fonction est dérivable sur ℝ et on a : $f'(x) = 1 - \sin x$

  Pour tout x , $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq 1 - \sin x \leq 2$ d'où $f'(x) \geq 0$ et la fonction f est croissante

- **Etude des limites de f en ±∞**

  On sait que $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$ c'est à dire $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$

  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ or $f(x) \geq x - 1$ donc d'après les th de comparaisons sur les limites,

    $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ or $f(x) \leq x + 1$ donc d'après les th de comp … , $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- f est donc continue et strictement croissante sur ℝ et on a $f(]-\infty;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$.

  Comme 0 ∈]-∞;+∞[, d'après le th des la bijection, il existe un unique α ∈]-∞;+∞[tel que $f(\alpha) = 0$. La calculatrice donne α ≈ **-0,73908** donc la décimale recherchée est 0

PROBLEME 2

Le dénominateur de la limite de f en +∞

vous donnera le second chiffre

f(x) = $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$

Comme on cherche la limite en +∞, $\sqrt{x^2} = |x| = x$ d'où :

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

On démontre alors facilement que la limite est $\frac{1}{2}$ donc le chiffre cherché est 2

PROBLEME 3

La limite de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12} \end{cases}$ constitue mon troisième chiffre

avec comme aide l'utilisation de la suite (v_n) définie par

$v_n=u_n^2-4$

Une étude sur tableur ou calculatrice permet de conjecture que (v_n) est une suite géométrique donc on le démontre :

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-4 \;=\; \frac{1}{4}(u_n^2+12)-4 \;=\; \frac{1}{4}u_n^2-1 \;=\; \frac{1}{4}(u_n^2-4) \;=\; \frac{1}{4}v_n$$

(v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ avec $v_0=u_0^2-4=-4$

On a donc $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \;=\; -4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ d'où $u_n^2=4-4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

comme $-1<\frac{1}{4}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ = 0 d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2$ =4 la limite de (u_n) serait donc -2 ou 2 mais on peut facilement démontrer par récurrence que la suite est positive donc la limite est 2

Le code recherché est donc 022

NB : Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1. Pour tout n, $0\leqslant v_n\leqslant 1$.
2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

1) Pour tout n , $u_n\le u_n+1$ donc le quotient $\frac{u_n}{1+u_n}$ est < 1 et comme la suite est positive , le quotient est positif **VRAI**

2) **VRAI** supposons que (u_n) CV vers une limite ℓ alors (v_n) tend vers $\ell/(1-\ell)$ donc cette limite de (v_n) existe sauf si (u_n) tend vers -1 or on sait que (u_n) est une suite positive donc elle ne peut tendre vers -1 et (v_n) CV

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}-\frac{u_n}{1+u_n} \;=\; \frac{u_{n+1}+u_{n+1}u_n-u_n-u_nu_{n+1}}{(1+u_n)(1+u_{n+1})} \;=\; \frac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$

   La suite (u_n) étant positive, le dénominateur est positif et comme (u_n) est supposé croissante, on a $u_{n+1}-u_n>0$ donc le quotient est positif c'est à dire $v_{n+1}-v_n>0$ ce qui donne $v_{n+1}>v_n$ et la suite st croissante donc **VRAI**

4) Retournons l'écriture de v_n : $v_n(1+u_n)=u_n \;\Leftrightarrow\; v_n+v_nu_n=u_n$ ssi $u_n(v_n-1)=-v_n$ et

   donc $u_n=\frac{-v_n}{v_n-1}$. On peut alors facilement trouver une suite v_n qui converge et pas u_n

exemple : $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ qui correspond bien à l'encadrement de la question 1

PROBLEME SPECIALITE

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \cdots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n) :

$u_1 = 1$
$u_2 = 3$
$u_3 = 3^2$
$u_4 = 3 \times 11$
$u_5 = 3^2 \times 17$
$u_6 = 3^2 \times 97$
$u_7 = 3^4 \times 73$
$u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?
3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

1)

- Les nombres 2 ! , 3 ! 4 ! ... sont tous pairs donc u_n s'écrit 1!+2K donc u_n est impair pour tout n et donc non divisible par 2
- A partir de 5 ! , tous les factorielles sont divisibles par 5, ils restent donc 1!+2!+3!+4!=33 d'où u_n = 33+5K ≠ 5K' donc non divisible par 5
- A partir de 7 ! tous les factorielles sont divisibles par 7 donc ils restent1!+2!+3!+4!+5!+6!=873 d'où u_n = 873+7K or 873 n'est pas divisible par 7 donc u_n non plus

2)

- A partir du rang 10, u_n peut s'écrire : $u_n = u_{10} + 11! + \ldots + n! = 3^2 \times 11 \times 40787 + 11\text{K}$ = 11K' donc u_n divisible par 11 à partir du rang 10

3)

- pour $3^2 = 9$, à partir du rang 8, $u_n = u_8 + 9! + \ldots + n!$

  3^2 est alors présent dans la décomposition de u_8 et dans tous les factorielles qui suivent ainsi u_n peut s'écrire $3^2 \times \text{K}$ donc est divisible par 3^2

  Or 3^3 est présent dans tous les factorielles à partir de 9 ! . En effet $9! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ = $3^3 \times 13440$. u_n peut donc s'écrire $u_n = u_8 + 3^3 \times \text{K}$ or $u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$ non divisible par 3^3 donc u_n ne peut s'écrire $3^3 \times \text{K}'$ et donc à partir du rang 8 tous les u_n sont divisible par 3^2 mais pas par 3^3