<u>DM3 corrige</u>

Exercice 1

Soit la suite u définie pour tout entier n ≥ 2 par :

$$u_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

1.a) Construire un algorithme permettant de calculer u_n pour tout entier n .

Variables N , U , K : type nombre

Traitement

```
Saisir N
Affecter à U la valeur 1
Pour  K variant de 2 à N  Faire
        U prend la valeur U*(1-1/K^2)
FinPour
Afficher U
```

b) La suite u semble être décroissante.

2. a) Démontrer que pour tout entier n ≥ 2 on a : $u_{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n$

$$u_{n+1} = u_n\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = u_n \times \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = u_n \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

b/ Démontrer que pour tout n ≥ 2 $u_n=\frac{n+1}{2n}$.

Démontrons ce résultat par récurrence :

On pose P_n :" $u_n=\frac{n+1}{2n}$ " pour $n\geqslant 2$

<u>Initialisation</u>

P_2 est vraie en effet $u_2=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\times 2}$

<u>Hérédité</u>

On suppose que pour un entier naturel $n\geqslant 2$ donné P_n est vraie. DQ sous cette hypothèse de récurrence P_{n+1} est alors vraie.

On vient de DQ $u_{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n$

D'où $u_{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\times\frac{n+1}{2\text{n}}=\frac{n+2}{2(n+1)}$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

<u>CCL</u>: P_2 est vraie et on vient de DQ si pour un entier naturel $n\geqslant 2$ donné P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.

Donc P_n ***est vraie pour tout entier naturel*** $n\geqslant 2$

c/ Prouver la conjecture émise à la question 1.b/

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{2(n+1)}-\frac{n+1}{2n}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{2n(n+1)}=\frac{-1}{2n(n+1)}<0$$

DC la suite u est strictement décroissante.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{(1-x)^3}{x^2}$$

On note C sa courbe représentative.

1. Trouver a, b, c et d tels que pour tout réel x non nul :

Pour tout x réel non nul $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)^3}{x^2}=\frac{x^2(ax+b)+cx+d}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^3+3x^2-3x+1}{x^2}=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases} \text{ par identification des coefficients}$$

$$f(x)=-x+3+\frac{-3x+1}{x^2}$$

2. Etudier les variations de la fonction f.

f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition]-∞;0[

$$f'(x)=\frac{-3(1-x)^2\times x^2-2x(1-x)^3}{x^4}=\frac{-3(1-x)^2\times x^2-2x(1-x)^3}{x^4}$$

$$=\frac{(1-x)^2(-3x^2-2x(1-x))}{x^4}=\frac{(x-1)^2(-x^2-2x)}{x^4}=\frac{-x(x-1)^2(x+2)}{x^4}$$

$$=\frac{-(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$

Avec un logiciel de calcul formel on obtient aussi

```
factoriser(deriver((1-x)^3/x^2,x),x)
```

$$\frac{-(x-1)^2\cdot(x+2)}{x^3}$$

x	-∞		-2		0		1		+∞
$(x-1)^2$		+		+	‖	+	0	+	
$-x-2$		+	0	-	‖	-		-	
x^3		-		-	‖	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	0	-	

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗	‖	↘	0	↘	

3. Etudier la position C par rapport à la droite D d'équation $y=-x+3$.
Etudions pour cela le signe de $f(x)-y$

$f(x)-y=\dfrac{-3x+1}{x^2}$ $f(x)-y$ est du signe de $-3x+1$ car $x^2>0$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		∞
$f(x)-y$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty;0[$ et sur $\left]0;\frac{1}{3}\right]$ C est au dessus de D

Sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ C est en dessous de D

En $\frac{1}{3}$ C coupe D

4. Construire C et D .