DM 2 Terminale S

Partie A

Une assiette de soupe est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M. Nous allons étudier le refroidissement de cette soupe en appliquant la loi de Newton. Cette loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

On note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$. On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. a) On sait que $T_0 = 80$, $T_1 = 66$ et $T_2 = 54{,}8$. Déterminer k et M .

b) Montrer alors que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.

4. La soupe est considérée comme froide quand sa température est inférieure à 11 °C.

Au bout de combien de minutes cette soupe est-elle considérée comme froide ?

On justifiera correctement la réponse

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier, dans un cas général, les suites dites arithmético-géométriques
La suite (T_n) de la partie A en est une car elle s'écrit sous la forme $T_{n+1} = aT_n + b$ où a et b sont deux réels
On se propose de calculer T_n en fonction de n et u_0 .
a) Traiter le cas a = 1 puis le cas b = 0

On suppose désormais $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

b) Résoudre l'équation x = ax + b. On note ℓ la solution.

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur; seule est utile l'équation $\ell = a\,\ell + b$.

c) Soit $v_n = T_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et conclure .