DM 2 Terminale S

Partie A

Une assiette de soupe est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée *M*. Nous allons étudier le refroidissement de cette soupe en appliquant la loi de Newton. Cette loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

On note T_n la température du café à l'instant *n*, avec T_n exprimé en degré Celsius et *n* en minute. On a ainsi $T_0 = 80$. On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques *n* et *n* +1 par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où *k* est une constante réelle.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variation de la suite (T_n) ?

Il semble évident que la suite (T_n) est décroissante

2. a) On sait que $T_0 = 80$, $T_1 = 66$ et $T_2 = 54{,}8$. Déterminer k et M .

$T_1 - T_0 = k(T_0 - M)$ donne $-14 = k(80 - M)$

$T_2 - T_1 = k(T_1 - M)$ donne $-11{,}2 = k(66 - M)$

Par quotient , il vient : $\dfrac{14}{11{,}2} = \dfrac{80-M}{66-M}$ soit $14(66-M) = 11{,}2(80-M)$

$$924 - 14\,M = 896 - 11{,}2\,M$$

$$-2{,}8\,M = -28$$

$$M = 10$$

On utilise alors l'une des deux équations de départ pour trouver k : $k = \dfrac{-14}{80-10} = -0{,}2$

b) Montrer alors que pour tout entier naturel *n* : $T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$.

$T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$ donne $T_{n+1} = -0{,}2\,T_n + 2 + T_n = 0{,}8\,T_n + 2$

3. On pose, pour tout entier naturel *n* : $u_n = T_n - 10$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .

$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0{,}8\,T_n + 2 - 10 = 0{,}8\,T_n - 8 = 0{,}8(T_n - 10) = 0{,}8\,u_n$

donc (u_n) suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 70$

b) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.

$u_n = u_0 \times q^n = 70 \times 0{,}8^n$ d'où $T_n = u_n + 10 = 70 \times 0{,}8^n + 10$

4. La soupe est considérée comme froide quand sa température est inférieure à 11 °C.

Au bout de combien de minutes cette soupe est-elle considérée comme froide ?

On justifiera correctement la réponse

Il faut résoudre $T_n < 11$ qui donne $70 \times 0{,}8^n + 10 < 11$

$$0{,}8^n < \frac{1}{70}$$

$$0{,}8^n - \frac{1}{70} < 0$$

On peut alors utiliser la table de la calculatrice ou un tableur pour trouver n

Avec la table ci-contre, on trouve n = 20

	A	B
1	n	0,8^n-1/70
2	0	0,9857142857
3	1	0,7857142857
4	2	0,6257142857
5	3	0,4977142857
6	4	0,3953142857
7	5	0,3133942857
8	6	0,2478582857
9	7	0,1954294857
10	8	0,1534864457
11	9	0,1199320137
12	10	0,0930884681
13	11	0,0716136316
14	12	0,0544337625
15	13	0,0406898671
16	14	0,0296947508
17	15	0,0208986578
18	16	0,0138617834
19	17	0,0082322839
20	18	0,0037286842
21	19	0,0001258045
22	20	-0,0027564992
23	21	-0,0050623422
24	22	-0,0069070167
25	23	-0,0083827562
26		

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier, dans un cas général, les suites dites arithmético-géométriques

La suite (T_n) de la partie A en est une car elle s'écrit sous la forme $T_{n+1} = aT_n + b$ où a et b sont deux réels

On se propose de calculer T_n en fonction de n et u_0 .

a) Traiter le cas a = 1 puis le cas b = 0

a = 1

$T_{n+1} = T_n + b$ la suite est arithmétique de raison b on a donc $T_n = T_0 + nr = T_0 + nb$

a = 0

$T_{n+1} = aT_n$ la suite est géométrique de raison a donc $T_n = T_0 \times q^n = T_0 \times a^n$

On suppose désormais a ≠ 1 et b ≠ 0 .

b) Résoudre l'équation x = ax + b. On note ℓ la solution.

$x - ax = b$ Donc comme a ≠ 1 , 1 – a ≠ 0 et x = $\frac{b}{1-a}$

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur; seule est utile l'équation

ℓ = a ℓ + b .

c) Soit $v_n = T_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et conclure .

$v_{n+1} = T_{n+1} - \ell = aT_n + b - \ell = aT_n + b - (a\ell + b) = aT_n - a\ell = a(T_n - \ell) = av_n$

donc suite géométrique de raison a de premier terme $v_0 = T_0 - \ell$. On a donc $v_n = v_0 \times a^n$ c'est à dire $T_n - \ell = (T_0 - \ell)\, a^n$ ce qui donne T_n= $(T_0 - \ell)\, a^n + \ell$