DM 1 TS2

Lundi 3 septembre

Exercice 1: QCM Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux en justifiant les réponses

a) Si un trinôme du second degré a son terme constant nul alors il s'annule en 0
Soit un trinôme du second degré P(x) = ax^2+bx+c son terme constant est nul donc P(x) = ax^2+bx et alors P(0)=0 donc VRAIE
b) La somme de deux polynômes du second degré est un polynôme du second degré
FAUX Contre exemple : Soit P(x) = x^2+2x+3 et $Q(x)=-x^2+4x+4$ on a alors : P(x) + Q(x) = 6x+7 qui est du premier degré
c) Soit P la fonction polynôme définie sur ℝ par $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$

Si a et c sont de signes opposés alors P admet au moins une racine réelle
$\Delta=b^2-4ac$ si a et c sont de signes opposés, on a donc ac < 0 d'où –4ac est positif et $\Delta>0$. Le polynôme admet donc au moins une racine réelle

Exercice 2:

a) Un texte de devoir est mal écrit et les coefficients en x^3 et en x d'une fonction polynôme ont été effacés.

On voit que : P(x) = $a\,x^3 - 2\,x^2 + b\,x - 3$

La première question du problème est : vérifier que – 1 et 3 sont racines de P

$P(-1)=0$ donc $-a-2-b-3=0$ soit $a+b=-5$

P(3)=0 donc $27a-18+3b-3=0$ soit $27a+3b=21$ cad $9a+b=7$

Il faut alors résoudre le système : $\begin{cases} a+b=-5 \\ 9a+b=7 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=-\dfrac{13}{2} \end{cases}$

D'où P(x) = $\dfrac{3}{2}x^3-2x^2-\dfrac{13}{2}x-3$

b) P est un polynôme donc dérivable sur son ensemble de définition .

$P'(x)=\dfrac{9}{2}x^2-4x-\dfrac{13}{2}$ de discriminant 133 > 0 donc deux racines $x_1=\dfrac{4+\sqrt{133}}{9}$ et $x_2=\dfrac{4-\sqrt{133}}{9}$

P' est donc du signe de a sauf entre ses racines d'où :

pour tout x ∈ $]-\infty;x_2] \cup [x_1;+\infty[$, $P' \geq 0$ donc f est croissante

pour tout x ∈ $[x_2;x_1]$, P' est ≤ 0 donc P est décroissante

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par f(x) = $\dfrac{2x^2-x-1}{-2x+3}$

f est définie sur D_f = ℝ/{3/2}. C'est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x)=\frac{-4x^2+12x-5}{(-2x+3)^2}$$

Pour tout x ∈ D_f , $(-2x+3)^2>0$ le signe de f' est donc celui de $-4x^2+12x-5$. On étudie donc son signe :
$\Delta=12^2-4\times(-4)\times(-5)$ = 64 >0 donc deux racines :
$x_1=\dfrac{-12-8}{-8} = \dfrac{5}{2}$ $x_2=\dfrac{-12+8}{-8} = \dfrac{1}{2}$ d'où

pour tout x $\in \left]-\infty ;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

pour tout x $\in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

x	$-\infty$		1/2		3/2		5/2		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	$\Vert$	+	0	–	
f(x)		$\searrow$	–1/2	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	–9/2	$\searrow$	