BAC BLANC 1 Terminales S **Epreuve de Mathématiques**

Mardi 17 Décembre 2019 **Durée : 4 heures** **Calculatrice autorisée**

Exercice 1 : **Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)**

Centre étranger Juin 2019

Le but de l'exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40

Partie A **les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes**

1) Sans justifier, donner deux nombres premiers x et y tels que 40 = x + y

   3 + 37 = 11+ 29 = 17 + 23 = 40

2) On considère l'équation $20x+19y=40$ où s et y désignent des entiers relatifs.

   Résoudre cette équation

   On cherche une solution particulière : (x ; y) = (- 17 ; 20) donc

   $\begin{cases} 20x+19y=40 \\ 20\times(-17)+19\times(20)=40 \end{cases}$ par soustraction il vient $20(x+17)-19(20-y)=0$

   c'est à dire $20(x+17)=19(20-y)$ on termine alors la résolution et on trouve

   $(x;y)=(-17+19k;20-20k)$

3) Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40=2^2+6^2$. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2-y^2=40$ où x et y désignent deux entiers naturels .

   a) Montrer que si x et y désignent des entiers naturels, alors les nombres x–y et x+y ont la même parité.

   On peut raisonner par disjonction de cas : x et y pair ou x et y impair ou x et y de parités différentes puis conclure

   b) En considérant 40 sous la forme : 40 = $2^3\times5$, déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2-y^2=40$ où x et y désignent deux entiers naturels

   $(x-y)(x+y)=40$. Le produit étant pair $x-y$ ou $x+y$ est pair donc avec la question précédente ils sont tout deux de même parité. Les seuls diviseurs associés de 40 qui sont pairs sont 2 et $2^2\times5=20$ ou $2^2=4$ et $2\times5=10$ d'où

   $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=20 \end{cases}$ OU $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=10 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x=11 \\ y=9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

<u>Partie B</u> « sommes » de cubes

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels . Par exemple : $13 = 4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$ ou encore $13 = -1^3-1^3-1^3+2^3+2^3$ ou encore $13 = 1^3+7^3+10^3-11^3$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différences de cubes d'entiers naturels ».

Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « sommes » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes

1) a) En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$ donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.

$$40=13+27=1^3+7^3+10^3-11^3+3^3$$

b) On admet que pour tout entier naturel n , on a : $6n = (n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$

En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes , différente de celle donnée en 1) a)

$48=6\times8=(8+1)^3+(8-1)^3-8^3-8^3$ d'où

$40=48-8 = 9^3+7^3-8^3-8^3-2^3$

2) Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40 = 4^3-2^3-2^3-2^3$. On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de trois cubes.

a) Recopier et compléter sans justifier

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) On déduit du tableau précédent que pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1 soit à -1.

Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

Quels sont donc les restes possibles de la division par 9 de la somme de trois cubes :

0+0+0=0 0+0+1 = 1 0+0+–1= –1 ≡ 8(9) 0+1+1=2 0+1+–1=0

0+-1+-1=-2 ≡ 7(9) 1+1+1=3 1+1-1=1 -1-1-1=-3 ≡ 6(9)

Les restes possibles de la somme de trois cubes sont donc {6 ; 7 ; 8 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 }

or 40=9*4+4 donc le reste de la division par 9 de 40 est 4 donc 40 ne peut s'écrire comme somme de trois cubes

<u>Exercice 1 :</u> pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

On considère la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels par $f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-x+e^x$

a. Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

g est une somme de fonctions dérivables sur r donc g est dériv sur r .

$g'(x)=-1+e^x$ et on a $-1+e^x\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

d'où pour tout $x \geq 0$, $g' \geq 0$ et g croissante

pour tout $x \leq 0$, $g'\leq 0$ et g décroissante

+ tableau

b. En déduire le signe de $g(x)$

g admet donc un minimum en 0 qui vaut 2 . Ce minimum étant positif, g est positive sur r .

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc par quotient $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$.

  Comme $\lim_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$ par somme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

- $\frac{x}{e^x}=\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ or on sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et comme $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$,

  par somme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)=e^{-x}g(x)$

$\frac{x}{e^x}$ est un quotient de fonction dérivable sur r avec le déno qui ne s'annule pas donc f est une somme de fonctions dérivables sur r et on a :

$$f'(x)=1+\frac{1\times e^x-x\times e^x}{(e^x)^2} = 1+(e^x-x\,e^x)\times e^{-2x} = 1+e^{-x}-x\,e^{-x}$$

$$e^{-x}g(x)=e^{-x}\times(1-x+e^x) = e^{-x}-x\,e^{-x}+1 = f'(x)$$

4 . a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Un th de la bijection après avoir préciser f' était strict positive donc f croissante

b. Démontrer que $-1<\alpha<0$

$f(-1)=-1+1-\frac{1}{e^{-1}} = -e < 0$ et $f(0)=0+1+0=1 > 0$ donc $0 \in \,]f(-1);f(0)[$ d'où $-1<\alpha<0$

c. On donne l'algorithme ci-contre où a b et m sont des réels. Exécuter l'algorithme pas à pas et compléter le tableau ci dessous que l'on reproduira et complétera en faisant autant de colonnes que nécessaire.

	Etape 1	Etape 2	...
a			
b			
$b-a$			
m			

```
a ← -1
b ← 0
Tant que b−a>0,1
        m ← 1/2(a+b)
        si f(m)<0   alors
              a ← m
        sinon
              b ← m
        Fin de si
Fin de Tant que
Afficher a
Afficher b
```

Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
a	–1	-0,5	-0,5000	-0,5000	-0,4375
b	0	0	-0,2500	-0,3750	-0,3750
$b-a$	1	0,5	0,2500	0,1250	0,0625
m	-0,5	-0,25	-0,3750	-0,4375	

L'algorithme va afficher -0,4375 et -0,375 qui donnent un encadrement d'amplitude 0,1 de α

Exercice 2 : **Pour tous (5 points)**

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

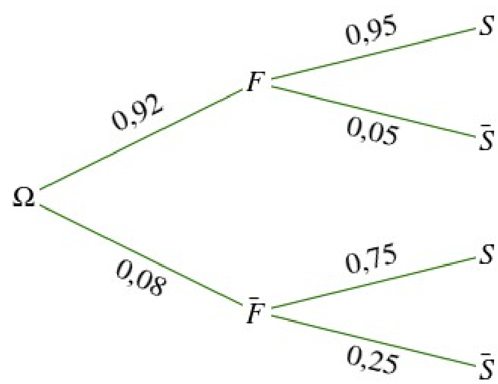
a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

$P(F) = 0{,}92 \quad P_F(S)=0{,}95 \qquad P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}02$

b. Démontrer que la probabilité de non S sachant non F vaut $\frac{1}{4}$ c'est à dire $P_{\overline{F}}(\overline{S})=\frac{1}{4}$

$P(\overline{F} \cap \overline{S}) = P_{\overline{F}}(\overline{S})\times P(\overline{F})$ d'où $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{0{,}02}{1-0{,}92} = \dfrac{1}{4}$

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.



2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que p(S) = 0,934.

F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S)$

$= 0{,}92\times 0{,}95+0{,}08\times 0{,}75$

$= 0{,}934$

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

(On donnera le résultat arrondi au millième.)

On $P_S(F) = P(S\cap F) / P(S) = \dfrac{0{,}92\times 0{,}95}{0{,}934} = 0{,}936$

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

X peut prendre comme valeur 10 , 0 , 5 et on a

- P(X=10) = P (F ∩ S) = $0,92\times0,95$ = 0,874
- P(X=5) = P(S ∩ $\overline{F}$) = $0,08\times0,75=0,06$
- P(X=0) = 1 – P(X=10) – $P(X=5)$

  = 0,066

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B et l'interpréter.

E(B) = $10\times0,874+5\times0,06+0=9,04$ donc un gain moyen de 9,04 euros par jouet fabriqué

4. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

a. Calculer la probabilité que tous les jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Le choix d'un jouet est une épreuve de Bernoulli avec pour Succès : le test de solidité est réussi de probabilité 0,934. Comme on choisit 10 jouets de manière indépendante, X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,934. On cherche donc $P(X=10)=0,934^{10}$ ≈ 0,505

b. Combien de jouets par lot en moyenne subissent avec succès le test de solidité, sur un grand nombre de lots ?

E(X) = $n\times p$ = 10*0,934 = 9,34 donc environ 9,34 jouets subissent avec succès ce test .

c. Calculer, à 10^{-3} près par défaut, la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

On veut P(X≥8) = 1 – P(X≤7) = 0,976

<u>**Exercice 3 :**</u> **Pour tous (5 points)** *Les parties* A *et* B *sont indépendantes.*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec

T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$$

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

Un café non chauffé refroidit donc (T_n) doit être décroissante

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$

$$T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,T_n + 2 \text{ d'où } T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$$

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

u_{n+1} =...= $0{,}8\,u_n$ donc géométrique de raison 0,8 de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 70$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.

$u_n = u_0 \times q^n = 70 \times (0{,}8)^n$

$T_n - 10 = 70 \times 0{,}8^n$ donc $T_n = 10 + 70 \times 0{,}8^n$

c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Facile on trouve 10

4. On considère l'algorithme suivant :

Tant que $T \geq 40$
$T \leftarrow 0{,}8T + 2$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme?

$T_3 = 45{,}84$ et $T_4 = 38{,}672$ donc n = 4 en sortie

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Au bout de quatre minutes, le café a une température ≤ 40 °C

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité : $\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - \mathrm{M})$.

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.

a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$: $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$

Montrer que, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, f est dérivable sur et que $f'(t) = 0$.

$$f'(t) = \frac{\theta'(t) \times \mathrm{e}^{-0{,}2t} - \theta(t) \times \left(-0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)^2} = \frac{-0{,}2\theta(t)\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 0{,}2\theta(t)\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{\left(\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)^2}$$

donc $f'(t) = 0$

b. En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.

En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

$f(0) = \dfrac{80}{\mathrm{e}^0} = 80$ or comme $f'(t) = 0$ f est une fonction constante d'où

pour tout t, f(t) = f(0) = 80 on a donc : $\theta(t) = f(t) \times \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$

c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

On a bien $\theta(0)=80$ et si on dérive $\theta'(t) = 80 \times (-0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = -0{,}2\,\theta(t)$.

__Exercice 4 :__ Pour tous (5 points)

Indiquer en justifiant si la proposition est vraie ou fausse

a) Etant donné une suite (x_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel n , on considère la suite (S_n) définie par : $\mathrm{S}_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$

Proposition 1 : Si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.

FAUX il suffit alors de trouver un contre exemple . On recherche donc une suite (x_n) qui converge alors que (S_n) ne converge pas . Par exemple : $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ cette suite converge vers 1 .

$$\mathrm{S}_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = n + \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$n + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = n + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$

Proposition 2 : Les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation

FAUX

$u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ > 0 donc (u_n) croissante

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ < 0 donc (S_n) décroissante

b) Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = e^x(1-x)+1$

Proposition 3 : L'équation $g(x)=0$ admet 2 solutions sur ℝ

C'est un th de la bijection à présenter :

- $g'(x) = e^x(1-x) + e^x(-1) = e^x(-x) = -xe^x$

  Comme $e^x > 0$ sur ℝ alors le signe de g' est celui de -x donc sur $ℝ^+$, g'<0 et g décroissante et sur $ℝ^-$, g'>0 et g croissante
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1-x = -\infty$ donc par produit puis somme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ `
- $g(x) = e^x - xe^x + 1$. On sait de part les croissances comparées : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où par somme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$
- d'où la tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

- Sur]–∞;0[, g est continue et strictement croissante et on a g(]–∞;0[)=]1;2[. La fonction g est donc strictement positive sur]1;2[et l'équation g(x)=0 n'admet pas de solution sur]–∞;0[
- Sur]0;+∞[, g est continue et strictement décroissante et on a g(]0;+∞[)=]–∞;2[. Comme 0 ∈]-∞;2[, d'après le th de la bij, il existe un unique α ∈]0;+∞[tel que g(x)=0
- BILAN : l'équation n'admet qu'une solution sur ℝ .

c) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

Proposition 4 : Pour tout entier naturel n , $u_n \geqslant n$

Un raisonnement par récurrence facile à mener

d) **Proposition 5:** Si deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendant alors $P(A \cup B)$ est égale à $1 - P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\
&= P(A) + P(B)(1 - P(A)) \\
&= P(A) + P(B) \times P(\overline{A}) \\
&= 1 - P(\overline{A}) + (1 - P(\overline{B}))(1 - P(\overline{A})) \\
&= \ldots \\
&= 1 - P(\overline{A}) \times P(\overline{B})
\end{aligned}$$