EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels t et s donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{3}{2}+2t=s\\ y &=& 2+t=\frac{3}{2}+s\\ z &=& 3-t=3-2s\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2}+2t &=& s\\ 2+t &=& \frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2t\\ 3-t &=& 3-2(\frac{3}{2}+2t)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2}+2t &=& s\\ 2+t &=& 3+2t\\ 3-t &=& -4t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{2}+2t &=& s\\ -1 &=& t\\ 3t &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\frac{1}{2} &=& s\\ -1 &=& t\\ t &=& -1\end{array}\right.$$

Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de d et de (d') donnent respectivement avec $t=-1$ et $s=-\frac{1}{2}$ les mêmes coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)$ du point commun à ces deux droites.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2-6+4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2+0=0$.

Conclusion $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{ABC}) \iff 1x+2y+4z+d=0,\ d\in\mathbb{R}$.

En particulier $\text{C}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\in(\text{ABC}) \iff 1+2+4+d=0,\ d\in\mathbb{R} \iff d=-7$.

Finalement : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{ABC}) \iff x+2y+4z-7=0$.

3. A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :

$\text{S}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)\notin(\text{ABC}) \iff -\dfrac{1}{2}+2+16-7\neq 0 \iff \dfrac{21}{2}\neq 0$ qui est bien vraie.

4. **a.** Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $\overrightarrow{SH}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

Or $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, on a bien $\vec{n}=-2\overrightarrow{SH}$.

D'autre part on a ;

$\text{H}(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)\in(\text{ABC}) \iff -1+2\times 0+4\times 2-7=0$ qui est vraie.

Conclusion : le point H$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. De $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-1\\-2\end{pmatrix}$ on en déduit que $\text{SH}^2=\dfrac{1}{4}+1+4=\dfrac{1}{4}+\dfrac{20}{4}=\dfrac{21}{4}$, d'où $\text{SH}=\sqrt{\dfrac{21}{4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier SM > SH, soit $\text{SM}>\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

1. Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$, avec $\overrightarrow{\text{CS}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\3\end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{\text{C}M} = k\overrightarrow{\text{CS}} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& -\frac{3}{2}k\\ y-1 &=& 0k\\ z-1 &=& 3k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-\frac{3}{2}k\\ y &=& 1\\ z &=& 1+3k\end{array}\right.$$

2. $(M\text{AB})$ est rectangle en M si :

(AM) et (BM) sont perpendiculaires soit si $\overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{\text{B}M} = 0$.

Avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}k+1\\1-2\\1+3k-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}2-\frac{3}{2}k\\-1\\3k\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}k-1\\1+1\\1+3k-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}k\\2\\3k-1\end{pmatrix}$ le produit scalaire s'écrit :

$$-\frac{3}{2}k\left(2-\frac{3}{2}k\right)-2+3k(3k-1)=0 \iff -3k+\frac{9}{4}k^2-2+9k^2+\frac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \iff$$
$$9k^2+36k^2-24k-8=0 \iff 45k^2-24k-8=0.$$

Pour cette équation du second degré, on a

$\Delta = 24^2-4\times 45\times(-8) = 2016 > 0$.

L'équation a deux solutions :

$k_1 = \dfrac{24+\sqrt{2016}}{90} \approx 0,765$ et $k_2 = \dfrac{24-\sqrt{2016}}{90} \approx -0,232$.

Seul $k_1 \in [0\,;\,1]$.

Conclusion : il existe un seul point M_1 du segment [CS] tel que M_1AB est un triangle rectangle en M_1.

Rem. Si on remplace k par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que $\text{AB}^2 = 14$, $\text{A}M_1^2 = 7$ et $\text{B}M_1^2 = 7$.

Le triangle M_1AB est un triangle rectangle $(7+7=14)$, mais aussi isocèle.