Interrogation Espace Terminale spécialité math

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) . On considère :

- les points $A(-1;2;1)$, $B(1;-1;2)$ et $C(1;1;1)$
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par d $\begin{cases} x=\frac{3}{2}+2t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}$ avec t ∈ ℝ
- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par d' : $\begin{cases} x=s \\ y=\frac{3}{2}+s \\ z=3-2s \end{cases}$ avec s ∈ ℝ

Partie A

1) Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)$

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+2y+4z-7=0$

3) Démontrer que les points A , B, C et S ne sont pas coplanaires

4) a) Démontrer que le point $H(-1;0;2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

b) En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM<\frac{\sqrt{21}}{2}$

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS}$ avec k un réel de l'intervalle [0;1]

1) Déterminer les coordonnées de M en fonction de k

2) Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?