# DS terminale
# Dérivation - convexité

## Le lundi 29 septembre

**Exercice 1** Vrai – Faux

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse . Chaque réponse doit être justifiée . Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $x\,\mathrm{e}^{-x}$ de courbe $C_f$

**Proposition 1** $C_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse x = 2

$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = (-2+x)\mathrm{e}^{-x}$ le signe de $f''$ est celui de $-2+x$ qui s'annule en x= 2 en changeant de signe donc point d'inflexion en x = 2 VRAI

2) On considère la fonction f définie sur ]0;+∞[ par f(x) = $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$

On admet que la dérivée seconde de f est donnée par : $f''(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$

a) **Proposition 2** La fonction dérivée de f est la fonction $f'$ définie par : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\times x-\mathrm{e}^{2x}\times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2} \quad \text{VRAI}$$

b) **Proposition 3** La fonction f admet un maximum en x = $\dfrac{1}{2}$

le signe de $f'$ est celui de $2x-1$ qui s'annule en x = $\dfrac{1}{2}$ en passant du signe – au signe + donc minimum FAUX

c) **Proposition 4** La fonction f est concave sur ]0;+∞[

Etudions le signe de $f''$

$2x^2-2x+1$ a pour $\Delta = -4 < 0$ donc le polynome est du signe de a c'est à dire positif d'où $f''$ est du signe de $x^3$ c'est à dire de x donc $f''$ est positive sur [0;+∞[ et f est convexe sur [0;+∞[ donc FAUX

**Exercice 2** Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) f(x) = $(7x-8)^9$

$f'(x) = 9\times 7\times(7x-8)^8 = 63(7x-8)^8$

b) f(x) = $(2x^2-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = 4x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(2x^2-3)\times\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

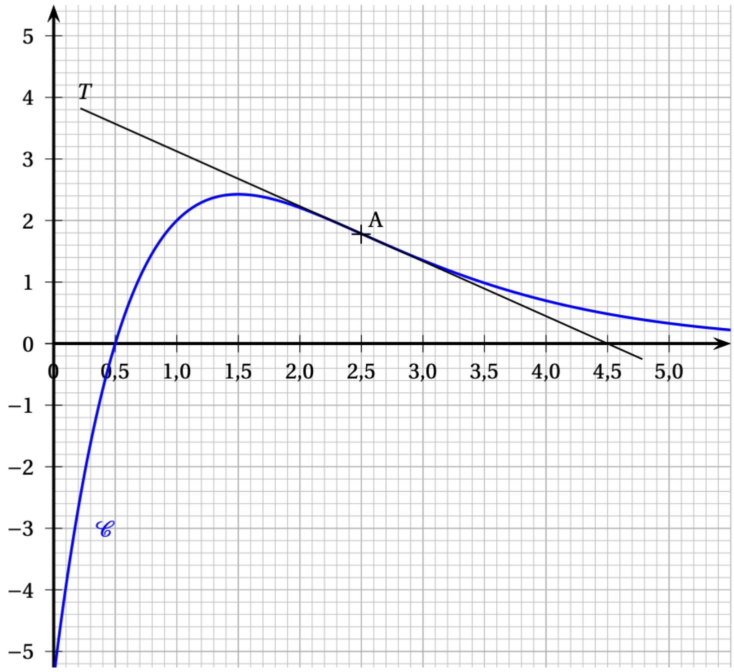
$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(4x-2+\frac{3}{x^2}\right)$$

**Exercice 3**

**Partie A**

On considère la fonction f définie sur [0;+∞[ par la courbe C ci-dessous.

La droite T est tangente à la courbe C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$




1) a) Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0;5]

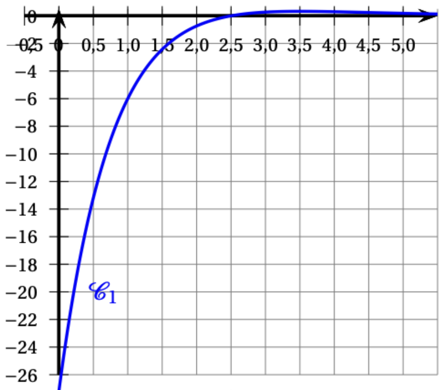
Trop facile on peut prendre x = 1,5 pour le changement de variation

b) Lire $f(2{,}5)$ = 1,8 et $f'(2{,}5)$ = -0,9

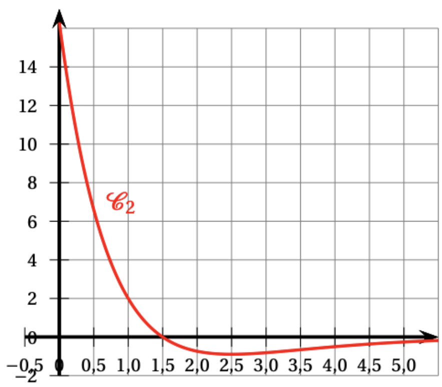
2) Que semble présenter la courbe C au point A ?

un point d'inflexion

3) La dérivée $f'$ et la dérivée seconde $f''$ sont représentées par les courbes ci-contre. Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente . Ce choix sera justifié.




Courbe $\mathscr{C}_1$




Courbe $\mathscr{C}_2$

la dérivée est positive sur [0;1,5] car f est croissante sur cet intervalle donc seule la courbe 2 le respecte donc

C2 = $f'$ et C1 = $f''$

**Partie B**

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur [0;+∞[, est définie par :

$$f(x)=(4x-2)e^{-x+1}$$

1) Montrer que $f'(x) = (-4x+6)e^{-x+1}$

$$f'(x) = 4e^{-x+1}+(4x-2)\times(-e^{-x+1}) = (-4x+6)e^{-x+1}$$

2) Dresser le tableau de variation complet de f ( on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ )

| $x$ | 0 | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | -2e | ↗ | $4e^{-\frac{1}{2}}$ | ↘ | 0 |

3) Etudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f .

$f'(x) = (-4x+6)e^{-x+1}$

$f''(x) = -4e^{-x+1}-(-4x+6)e^{-x+1} = (4x-10)e^{-x+1}$

Etudions le signe de $f''$

le signe de $f''$ est celui de $4x-10$

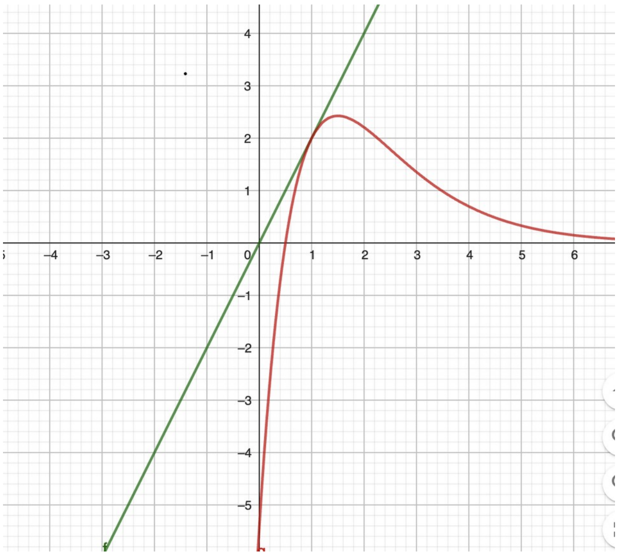
pour tout x ∈ $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ , $f''$ est négative donc f est concave

pour tout x ∈ $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ , $f''$ est positive donc f est convexe

4) Edouard affirme que pour tout x ∈ [0;2,5], f(x) ≤ $2x$ . A-t-il raison ?

En traçant la courbe sur la calculatrice et la droite y=2x, on constate que la droite semble tangente à la courbe en 1

Déterminons l'équation de latangente à la courbe en 1



y = $f'(1)(x-1)+f(1)$

On a $f'(1)$ = 2 et f(1) = 2 d'où y = $2(x-1)+2$

y = 2x

Ainsi la droite y = 2 est tangente à la courbe au point d'abscisse 1 or la fonction concave sur [0;2,5] et par définition la courbe est alors au dessous de toutes ses tangentes d'où

pour tout x ∈ [0;2,5], f(x) ≤ $2x$

VRAI