

Mercredi 10 septembre

Exercice 1

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament .

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament , exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml.

1) Calculer la valeur de u_2

$$u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 1,6 = 3,6$$

2) Montrer par récurrence que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier naturel $n > 0$.

Ini : n = 1

$$u_1 = 2 \text{ et } 10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 = 2 = u_1 \text{ donc la relation est vraie au rang 1}$$

SQ un entier $n > 0$ tel que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

DQ $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^n$

On sait que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

$$0,8 \times u_n = 0,8 \times 10 - 8 \times 0,8^n = 8 - 8 \times 0,8^n$$

$$0,8u_n + 2 = 10 - 8 \times 0,8^n$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 1 donc elle est vraie pour tout $n > 0$

3) Conjecturer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

On peut conjecturer que la limite est de 10 donc le patient n'aura jamais plus de 10 ml dans la sang

4) A l'aide de votre calculatrice, déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient sera strictement supérieure à 9 ml .

$$u_{10} = 8,92 \quad u_{11} = 9,14 \quad \text{donc à partir de 11 injections}$$

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours de temps .

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

On admet que (S_n) est croissante

1) Calculer S_2

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8$$

2) Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif ,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10 - 8 \times 0,8^{1-1} + 10 - 8 \times 0,8^{2-1} + \dots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$$

$$= 10 + 10 + \dots + 10 - 8 \times (0,8^0 + 0,8^1 + \dots + 0,8^{n-1})$$

$$= 10n - 8 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 10n - 40(1 - 0,8^n) = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$$

3) On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage python

```
1 def mystere(k) :
2     n=1
3     s = 2
4     while s < k :
5         n = n+1
6         s = 10-40/n+(40*0,8**n)/n
```

Dans le contexte de l'exercice, que représente la valeur renvoyée par la saisie de `mystere(9)` ?

Cette procédure renvoie le plus petit entier naturel n pour lequel $S > 9$

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$$

Partie A conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous . Aucune justification n'est demandée

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	0,5	0,5	0,375	0,25	0,15625

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n)

la limite semble être égale à zéro

Partie B Etude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1) Calculer w_0

$$w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 0,5$$

2) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}w_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\&= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\&= \frac{1}{2}w_n \text{ donc géométrique de raison } \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3) Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n

$$w_n = w_0 \times q^n = 0,5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

4) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \text{ donc } u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5) Démontrer par récurrence que pour tout n , $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{ini : } n = 0 \quad 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \quad \text{or } u_0 = 0 \text{ donc relation vraie au rang } 0$$

$$\text{SQ il existe } n \text{ tel que } u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{DQ } u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{On sait que } u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ donc}$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

la relation est donc héréditaire etc.....

Partie C Etude de la suite (u_n)

1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left((n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right) - n \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1-n}{2} \wedge$$

pour $n > 1$, $1-n$ est négatif donc $u_{n+1} - u_n < 0$ cad $u_{n+1} < u_n$ et la suite est décroissante à partir du rang 1

2) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

La conjecture de la partie A est-elle vérifiée ?

L'équation a pour solution 0 donc la conjecture est vérifiée