DS Limites et continuité
Terminale B

Le vendredi 20 décembre 2024

Exercice 1

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x^2+e^{x-1} \; si \; x \le 1 \\ f(x)=x+k \; si \; x>1 \end{cases}$ soit continue sur IR .

on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+k = 1+k$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2+e^{x-1} = 2$

Pour assurer la continuité de f en sur IR il faut f continue en 1 car ailleurs f est continue d'où 1+k = 2 ce qui donne k = 1

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} -3x^3+2x^2+3x-2$ facile on factorise par x³ la limite vaut +∞	b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-3}{(x-1)^2}$ $\lim\limits_{x\to 1} e^x-3 = e-3$ $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0^+$ (positif car carré) d'où par quotient $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-3}{(x-1)^2} = -\infty$ car $e-3$ est négatif	c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+x\sin(x)$ $x^2+x\sin x = x(x+\sin x)$ $-1 \le \sin x \le 1$ donc $x-1 \le x+\sin x \le x+1$ on a $\lim\limits_{x\to +\infty} x-1 = +\infty$ donc comme $x+\sin x \ge x-1$ d'après les th de comparaisons, $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\sin x = +\infty$ il vient alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+x\sin(x) = +\infty$

Exercice 3

Partie I

Soit g la fonction définie sur [0;+∞[par g(x) = $e^x - xe^x + 1$

1) Déterminer la limite de g en +∞

   FI donc g(x) = $e^x(1-x)+1$ puis la limite est facile et vaut -∞

2) Etudier les variations de la fonction g

   g'(x) = $e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

   pour tout x ap [0;+∞[, x et e^x sont positif donc g'(x) est négative et g est décroissante

3) Donner le tableau de variation de g

x	0 +∞
$f'(x)$	-
$f(x)$	2 ↘ -∞

4) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet sur [0;+∞[une unique solution que l'on notera α

   g est continue et strictement décroissante sur [0;+∞[et on a g([0;+∞[) =]-∞;2].
   Comme 0 ∈]-∞;2], d'après le corollaire du TVI , l'équation g(x) = 0 admet une unique solution sur [0;+∞[

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un **encadrement** d'amplitude 10^{-2} de α

$$\alpha \in \left]1{,}27;1{,}28\right[$$

c) Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

$g(\alpha) = 0$ donc $e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1 = 0$

$$e^{\alpha}(1-\alpha)=-1$$

$$e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$$

5) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x

g est décroissante sur [0;+∞[et s'annule en α donc :

x	0	α	$+\infty$
g(x)	+	0	–

Partie II

Soit A la fonction définie sur [0;+∞[par $A(x)=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$

1) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul , $A'(x)$ a le même signe que g(x)

$$A'(x) = \frac{4(e^{x}+1)-4xe^{x}}{(e^{x}+1)^{2}} = \frac{4(e^{x}+1-xe^{x})}{(e^{x}+1)^{2}} = \frac{4g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$$

comme 4 et $(e^{x}+1)^{2}$ sont positif, A' est donc du signe de g(x)

2) En déduire les variations de la fonction A sur [0;+∞[

D'après la question précédente, A'(x) est positif sur $[0;\alpha]$ et négatif sur $[\alpha;+\infty[$ d'où

A est croissante sur $[0;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie III

1) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α

On place les points dans le repère proposé et on a alors :

aire (OPMQ) = $OP\times PM = x\times f(x) = \dfrac{4x}{e^{x}+1} = A(x)$

D'après les variations de la fonction A , on a donc l'aire maximale pour x = α

2) Le point M a pour abscisse α

La tangente (T) en M à C_f est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

$f'(x) = -\dfrac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$ et on a $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ donc $e^{\alpha}+1 = \dfrac{1}{\alpha-1}+1 = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où

Coefficient directeur de (T) : $f'(\alpha) = -\dfrac{4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^{2}} = -\dfrac{4\times\dfrac{1}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{2}} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^{2}}$

Coefficient directeur de (PQ) : $\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^{2}}$

Les coef directeurs sont égaux donc les droites sont parallèles