DS Limites et continuité

Terminale B

Le vendredi 20 décembre 2024

Exercice 1

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x^2+e^{x-1} \text{ si } x \leq 1 \\ f(x)=x+k \text{ si } x>1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3+2x^2+3x-2$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x-3}{(x-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+x\sin(x)$

Exercice 3

Partie I

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$
2) Etudier les variations de la fonction g
3) Donner le tableau de variation de g
4) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet $[0;+\infty[$ une unique solution que l'on notera α

   b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un **encadrement** d'amplitude 10^{-2} de α

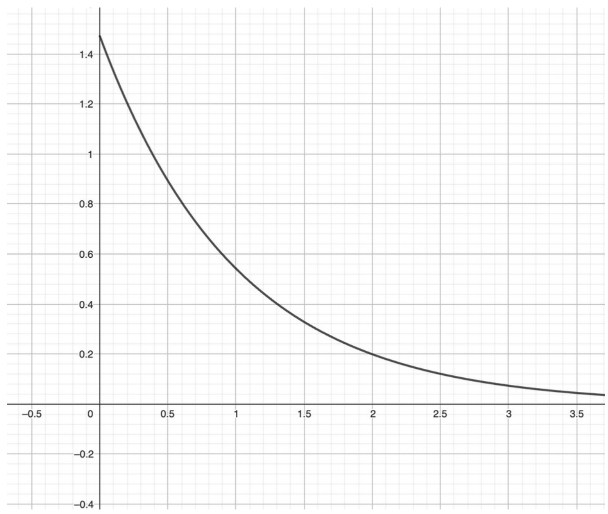
   c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$
5) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x

Partie II

Soit A la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$

1) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul , $A'(x)$ a le même signe que g(x)
2) En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$

Partie III



On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repéère d'origine O donné ci-contre

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de C_f de coordonnées (x ; f(x))

P le point de coordonnées (x ; 0)

Q le point de coordonnées (0 ; f(x))

1) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α
2) Le point M a pour abscisse α

   La tangente (T) en M à C_f est-elle parallèle à la droite (PQ) ?