DS espace saison I Terminale B

Le vendredi 29 novembre

1 heure

Exercice 1

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations est exacte.
Indiquer sur la copie la bonne réponse **en justifiant votre choix** :

On se place dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

1) La droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+3t \\ z=2-t \end{cases}$ où t ∈ ℝ passe par :

a) $A(1;3;-1)$ b) $B(1;-1;0)$ c) $C(0;-4;-3)$ d) $D(4;8;-1)$

réponse d

Cherchons t tel que : $\begin{cases} 4=1+t \\ 8=-1+3t \\ -1=2-t \end{cases}$ ssi $\begin{cases} t=3 \\ t=3 \\ t=3 \end{cases}$ t est u nique donc réponse d

2) On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ où t ∈ ℝ .

Une autre représentation paramètrique de (d') est :

a) $\begin{cases} x=2-2k \\ y=3+4k \\ z=-1+k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=9+4k \\ z=2+2k \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=-2-k \\ y=-3+2k \\ z=1+k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=4-2k \\ y=6+4k \\ z=-2+2k \end{cases}$.

On commence par les vecteurs directeurs : $\vec{u}_a \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_b \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_d \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

On cherche alors un vecteur colinéaire à $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on élimine donc a)

On vérifie alors si le point A $(2;3;-1)$ de (d') est sur b c ou d

$\begin{cases} 2=-1-2k \\ 3=9+4k \\ -1=2+2k \end{cases}$ ssi $\begin{cases} k=-1{,}5 \\ k=-\dfrac{6}{4} \\ k=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ k est unique donc réponse b

3) On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont :

a) colinéaires b) coplanaires

c) non coplanaires d) les réponses précédentes sont fausses

On cherche une relation du type $\vec{u} = x\ \vec{v} + y\ \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 8y = 2 \\ x - 4y = -1 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ -x + 8(2x-1) = 2 \\ x - 4(2x-1) = -1 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 15x = 10 \\ -7x = -5 \end{cases}$$

comme x n'est pas unique , la combinaison n'existe pas donc vecteurs non coplanaires

réponse c)

Exercice 2 On se place dans un repère de l'espace . On considère les points A , B et C de coordonnées respectives : $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$

1) Montrer que les points A , B et C définissent un plan

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{1}{4} \neq -\dfrac{6}{3} = \dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés et définissent un plan

2) Déterminer les coordonnées du point I milieu de [BC] $\quad I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

3) Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

$2\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} -3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} -10 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix}$ ce qui donne $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} x = -8 \\ y = -17 \\ z = 14 \end{pmatrix}$

4) Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de [AK]

$x_C = \dfrac{x_A + x_K}{2}$ et $y_C = \dfrac{y_A + y_K}{2}$ et $z_C = \dfrac{z_A + z_K}{2}$ ce qui donne

$6 = \dfrac{2 + x_K}{2}$, $7 = \dfrac{4 + y_K}{2}$, $-2 = \dfrac{-1 + z_K}{2}$

$x_K = 10$, $y_K = 10$, $z_K = -3$

Exercice 3

On se place dans un cube ABCDEFGH . On considère le point I , milieu de [ÊF], le point J tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BF}$ et le point K tel que $\vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CG}$

L'espace est muni du repère (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$)

1) a) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes . On note M leur point d'intersection

Droites coplanaires non représentées par des parallèles donc sécantes

b) A l'aide de deux autres droites sécantes, construire, sans justifier, l'intersection de (IJK) et (ABC)

c) Construire, sans justifier et en rouge, la section du cube par le plan (IJK)

2) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9};1;1\right)$

a) Sur quelle arête se situe le point L ?

L se situe sur l'arête [HG]

b) Donner les coordonnées des points I , J et K ?

I ($\frac{1}{2};0;1$) J ($1;0;\frac{1}{4}$) K ($1;1;\frac{1}{3}$)

b) Montrer que les points I , J , K et L sont coplanaires

$\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{JL}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

On cherche x et y tel que $x\vec{IJ}+y\vec{IK}=\vec{JL}$

$$x\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=-\frac{4}{9}\\ y=1\\ -\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y=\frac{3}{4}\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{4}{9}\\ y=1\\ -\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases}x=-\frac{17}{9}\\ y=1\\ x=-\frac{17}{9}\end{cases}$$

On a donc $-\frac{17}{9}\vec{IJ}+\vec{IK}=\vec{JL}$

Ces vecteurs sont coplanaires et formés avec quatre points donc ces points sont coplanaires

c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes .

I , J , K , L étant coplanaires les droites sont sécantes ou parallèles or elles ne sont pas représentées par des paralléles donc elles sont sécantes

d) Donner une représentation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection

$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\y=0+1t\\z=1-\frac{2}{3}t\end{cases}$ $\quad$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=1-\frac{4}{9}k\\y=0+k\\z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}k\end{cases}$

on cherche donc t et k tek que :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=1-\frac{4}{9}k\\t=k\\1-\frac{2}{3}t=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}k\end{cases}\text{ ssi }\begin{cases}\frac{1}{2}t+\frac{4}{9}t=1-\frac{1}{2}\\t=k\\-\frac{2}{3}t-\frac{3}{4}t=\frac{1}{4}-1\end{cases}\text{ ssi }\begin{cases}\frac{17}{18}t=\frac{1}{2}\\t=k\\-\frac{17}{12}t=-\frac{3}{4}\end{cases}\text{ ssi }\begin{cases}t=\frac{9}{17}\\t=k\\t=\frac{9}{17}\end{cases}$$

le couple (t;k) est unique donc le point d'interscetion est

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{17}\\y=\frac{9}{17}\\z=1-\frac{2}{3}\times\frac{9}{17}\end{cases}\text{ d'où }\begin{cases}x=\frac{13}{17}\\y=\frac{9}{17}\\z=\frac{11}{17}\end{cases}$$