<u>DS Convexité Terminale B</u>

Vendredi 27 septembre
1 heure
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $\mathbb{R}/\{1\}$ par f(x) = $\dfrac{e^x}{x-1}$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère

1) a) Montrer que pour tout réel x de I , on a : $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$

f est de la forme u/v donc $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)-1\times e^x}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$

b) Dresser en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur I .

pour tout x ∈ D_f , e^x et $(x-1)^2$ sont positifs donc le signe de f' est celui de $x-2$ d'où

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	‖	↘	e^2	↗	

2) On admet que pour x de]–∞;1[, on a : $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$

a) Etudier la convexité de f sur]–∞;1[.

il faut étudier le signe de f'' pour tout x , e^x est positif donc le signe est celui de $\dfrac{(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$

x^2-4x+5 est du second degré de Δ = –4 < 0 donc il est du signe de a cad positif d'où le signe de f'' est celui de $(x-1)^3$ c'est à dire le signe de x-1 Or on travaille ici sur]–∞;1[donc x-1 et négatif d'où f'' est négative et f est concave

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0

On trouve y = –2x–1

c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle]–∞;1[, on a : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$

la fonction est concave sur]–∞;1[donc la courbe est en dessous de ses tangentes donc en particiulier pour la tangente en 0 d'où

pour tout x ∈]–∞;1[, f(x) ≤ $-2x-1$

$$\frac{e^x}{x-1} \leq -2x-1$$

$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$ on change l'ordre car x-1 est négatif sur]–∞;1[

Exercice 2 Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{7x^2-4x+1}$

forme $\sqrt{u}$

$$f'(x) = \frac{14x-4}{2\sqrt{7x^2-4x+1}}$$

2) f(x) = $(x-2)e^{-3x+1}$

forme u/v

$$f'(x) = 1\times e^{-3x+1}+(x-2)\times(-3e^{-3x+1})$$

$$f'(x) = (-3x+7)e^{-3x+1}$$

3) f(x) = $2(5x-4)^9$

forme u^n

$$f'(x) = 2\times9\times5\times(5x-4)^8$$

$$f'(x) = 90(5x-4)^8$$

Exercice 3

Pour chacune des informations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée

1) Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = xe^{-x}

Affirmation 1 le point $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de f

Il faut étudier la convexité de f et pour cela on calcule f''

f'(x) = $1e^{-x}+x\times(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

f''(x) = $-1\times e^{-x}+(1-x)\times(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

Le signe de f'' est donc celui de x-2 d'où

sur]–∞;2] , f'' est négative et f est concave

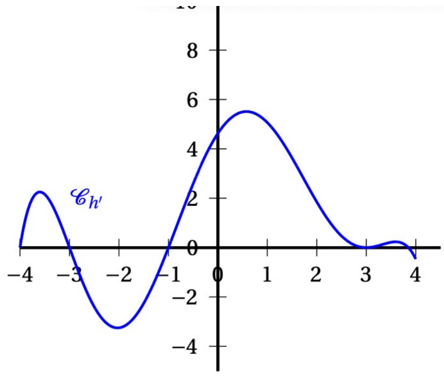
sur [2;+∞[, f'' est positive et f est convexe

f'' s'annule donc en 2 en changeant de signe donc un seul point d'inflexion de coordonnées

$A(2;f(2))$ c'est à dire $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$

2) Soit h une fonction définie et dérivable sur [–4;4]

On donne ci-dessous la courbe représentative $C_{h'}$ de sa fonction dérivée h'



Affirmation 2

La fonction h est convexe sur [–1;3]

Une fonction est convexe si sa dérivée est croissante or ici

sur [–1;3] , on constate de h' est croissante puis décroissante donc FAUX h n'est pas convexe sur [–1;3]