DM1 Terminale B

On considère la suite (u_n) définie par u_0 = 3 et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=5u_n-4n-3$

1) Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 5\times u_0-4\times 0-3 = 12$ $\qquad$ $u_2 = 5\times u_1-4\times 1-3 = 53$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geq n+1$

Initialisation n = 0 $\quad u_0=3\geq 0+1$ la relation est vraie au rang 0

SQ il existe n tq $u_n\geq n+1$ $\qquad$ DQ $u_{n+1}\geq n+2$

On sait que $u_n\geq n+1$

$5u_n\geq 5n+5$

$5u_n-4n-3\geq 5n+5-4n-3$

$u_{n+1}\geq n+2$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle est vraie pour tout n

3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n-n-1$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

$v_{n+1} = u_{n+1}-(n+1)-1 = 5u_n-4n-3-n-2 = 5u_n-5n-5 = 5(u_n-n-1) = 5v_n$

Suite géo de raison 5 de premier terme $v_0 = u_0-0-1 = 2$

b) En déduire la forme explicite de (u_n)

On a donc $v_n=v_0\times q^n=2\times 5^n$

d'où $\quad u_n-n-1=2\times 5^n$

$u_n=2\times 5^n+n+1$

4) a) Calculer S = $\sum_{k=3}^{k=25} v_n = 2\times 5^3+2\times 5^4+\ldots+2\times 5^{25} = 2(5^3+5^4+\ldots+5^{25})$

$= 2(1+5^1+5^2+5^3+5^4+\ldots+5^{25}-(1+5^1+5^2))$

$= 2\times(\frac{1-5^{26}}{1-5}-1-5-25) = \frac{1-5^{26}}{-2}-62 = \frac{-1+5^{26}}{2}-62 = \frac{-125+5^{26}}{2}$

b) En déduire T = $\sum_{k=3}^{k=25} u_n$

T = $u_3+u_4+\ldots+u_{25}$

Or $u_n = v_n+n+1$

T = $v_3+3+1+v_4+4+1+\ldots+v_{25}+25+1$

T = $v_3+v_4+\ldots+v_{25}+4+5+\ldots+26$

T = S + $\frac{23\times(4+26)}{2}$

T = S + 345