BAC BLANC 2 Terminales Spécialité mathématiques

Mardi 28 janvier 45² 4 heures

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

1) **Affirmation 1** Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0

FAUX Si on prend $u_n = \frac{1}{n}+3$

n étant un entier naturel, la suite est positive donc minorée par 0

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ donc la suite est décroissante or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

2) On considère une suite (u_n) définie sur ℕ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \frac{-9^n+3^n}{7^n}$

Affirmation 2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ VRAI

$v_n = \frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\frac{9^n}{7^n}+\frac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n+\left(\frac{3}{7}\right)^n$. On montre alors facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'où avec les th de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3) On considère la fonction suivante écrite en langage python :

```python
def terme(N)
    U = 1
    for i in range(N) :
        U = U + i
    return U
```

Affirmation 3 terme(4) renvoie la valeur 7

La suite est définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$ et l'algo calcule u_4 donc

$u_1 = u_0+0 = 1$ $u_2 = u_1+1 = 2$ $u_3 = u_2+2 = 4$ $u_4 = u_3+3 = 7$ Donc VRAI

4) On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $5x\mathrm{e}^{-x}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Affirmation 4 L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f

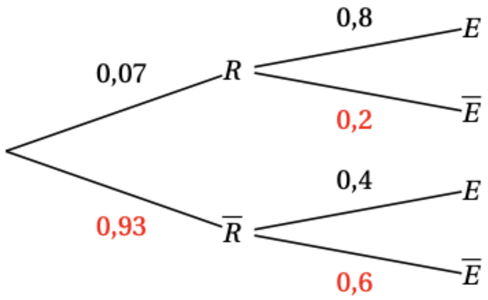
On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ f(x) = $5\times\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{5}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$

or d'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc par inverse on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et l'axe y = 0 cad l'axe des abscisses est une asymptote à C_f en $+\infty$

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
$p(R) = 0,07\,;\, p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

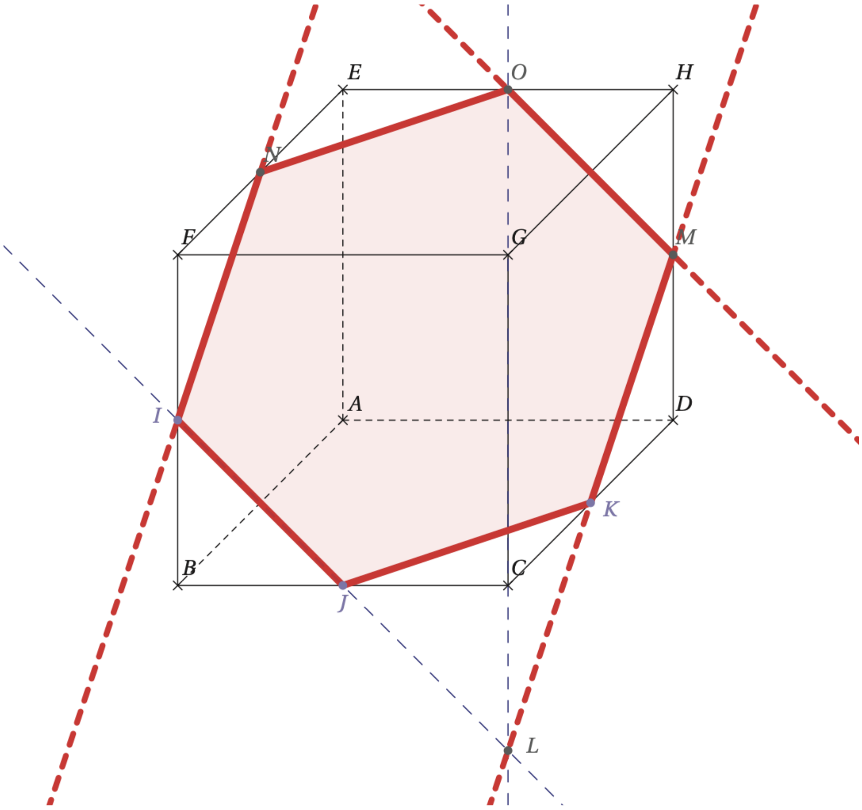
1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.
L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.
2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.
3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\;p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :
$p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.
Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.
4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.
Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.
D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.
Conclusion : il faut que $N \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF], le point J est le milieu de [BC] et le point K est le milieu du segment [CD]



1) Justifier que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L

Les droites appartiennent au plan BCGF et ne sont pas représentées par des parallèles donc elles sont sécantes en un point L

2) Construire, sur la figure ci-dessus, et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L
- l'intersection (d) des plans (IJK) et (CDH) c'est la droite (LK)
- la section du cube par le plan (IJK)

On ne demande pas de justifier les constructions

Partie B

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

On considère les points $M(1;-2;-1)$ et $N(3;-5;-2)$

1) Déterminer une représentation paramètrique de la droite (MN)

$\overrightarrow{MN}(2;-3;-1)$ donc $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$ avec t ∈ ℝ .

2) On note (d') la droite ayant pour représentation paramètrique :

$$\begin{cases} x=2-k \\ y=-2+2k \\ z=k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}\ .$$

Démontrer que les droites (MN) et (d') sont coplanaires

Résolvons le système :

$$\begin{cases} 1+2t=2-k \\ -2-3t=-2+2k \\ -1-t=k \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+2t=2+1+t \\ -2-3t=-2-2-2t \\ -1-t=k \end{cases} \qquad \begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ -3=k \end{cases}$$

Le couple (t;k) étant unique, les deux droites sont sécantes en un point K $(5;-8,-3)$

3) On considère le plan P passant par le point M et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;1;-1)$ et $\vec{v}(0;5;-1)$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On peut constater que $\overrightarrow{MN} = 2\vec{u}-\vec{v}$. Ainsi les vecteurs sont coplanaires

b) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la droite (MN) et du plan P ?

les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires donc la droite (MN) est incluse dans le plan P

c) Démontrer que le plan P et la droite (d') se coupent en un point K dont on précisera les coordonnées.

La droite (d') coupe la droite (MN) en K donc la droite (MN) étant incluse dans le plan P, (d') coupe le plan P en K $(5;-8,-3)$

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par $f(x) = x-2+\frac{1}{2}\ln x$

On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur]0;+∞[

1) a) Déterminer en justifiant les limites de f en 0 et en +∞

Aucun problème pour ces deux limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que pour tout x appartenant à]0;+∞[, on a $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$

Facile

c) Etudier le sens de variation de la fonction f sur]0;+∞[

Facile f est croissante

d) Etudier la convexité de f sur]0;+∞[

on calculer f'' qui est négative donc f concave

$$f''(x) = -\frac{2}{(2x)^2} = -\frac{1}{2x^2}$$

2) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]0;+∞[une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle [1;2]

Un TVI classique

f(1) = ... et f(2) = ... comme 0 ∈ $[f(1);f(2)]$, α ∈ [1;2]

b) Déterminer le signe de f(x) pour x ∈]0;+∞[

f est négative sur $]0;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;+\infty[$

c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$

$f(\alpha) = 0$ donc $\alpha-2+\frac{1}{2}\ln\alpha = 0$ donc $\ln\alpha = 2(2-\alpha)$

Partie B Etude de la fonction g

Soit g la fonction définie sur]0;1] par g(x) = $-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x$

On admet que la fonction g est dérivable sur]0;1] et on note g' sa fonction dérivée

1) Calculer $g'(x)$ pour x ∈]0;1] puis vérifier que $g'(x)=x\,f(\frac{1}{x})$

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x = -2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}\ln x \text{ d'où } xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1-2x-\frac{1}{2}x\ln x = g'(x)$$

2) a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$

Pour x < $\frac{1}{\alpha}$ alors $\frac{1}{x}$ > α (la fonction inverse étant décroissante)

On a donc $\frac{1}{x}$ ∈ $]\alpha;+\infty[$ or on sait que sur $]\alpha;+\infty[$, f est positive d'où $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est positif sur $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$

b) On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f(\frac{1}{x})$	‖	+	0	-	

En déduire le tableau de variation de g sur l'intervalle]0;1] . Les images et les limites ne sont pas demandées

$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ donc pour x ∈ $]0;1]$, x est positif donc le signe de g' est celui de $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Le tableau est alors facile à faire