BAC BLANC 2 Terminales Spécialité mathématiques

Mardi 28 janvier 45^2 4 heures

Calculatrice en mode examen

1 seule calculatrice par élève

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

1) **Affirmation 1** Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0

2) On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$

Affirmation 2 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

3) On considère la fonction suivante écrite en langage python :

```
def terme(N)
    U = 1
    for i in range(N) :
        U = U + i
    return U
```

Affirmation 3 terme(4) renvoie la valeur 7

4) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $5xe^{-x}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Affirmation 4 L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f

Exercice 2 (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi.
L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets commun ou rare sont disponibles, des épées ou des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :
. la probabilité de tirer un objet rare est de 7 %;
. si on tire un objet rare , la probabilité que ce soit une épée est de 80 %;
. si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet . On note :

. R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
. E l'événement « le joueur tire une épée » ;
. $\overline{R}$ et $\overline{E}$ sont les événements contraires de R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.

2. Calculer la probabilité de tirer une épée.

3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième .

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis.
Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable X. Préciser ses paramètres et son espérance.
2. Déterminer $P(X<6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo, veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.
   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

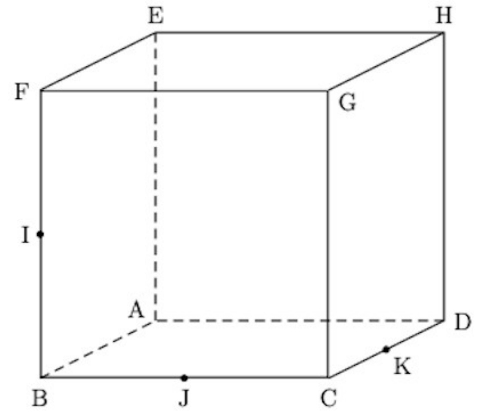
   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en place.

Exercice 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF], le point J est le milieu de [BC] et le point K est le milieu du segment [CD]



1) Justifier que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L

2) Construire, sur la figure ci-dessus, et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L
- l'intersection (d) des plans (IJK) et (CDH)
- la section du cube par le plan (IJK)

On ne demande pas de justifier les constructions

Partie B

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

On considère les points $M(1;-2;-1)$ et $N(3;-5;-2)$

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN)

2) On note (d') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2-k \\ y=-2+2k \\ z=k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites (MN) et (d') sont coplanaires

3) On considère le plan P passant par le point M et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;1;-1)$ et $\vec{v}(0;5;-1)$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

b) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la droite (MN) et du plan P ?

c) Démontrer que le plan P et la droite (d') se coupent en un point P dont on précisera les coordonnées.

<u>Exercice 4</u> (6 points)

Partie A : étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par $f(x) = x-2+\frac{1}{2}\ln x$

On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur]0;+∞[

1) a) Déterminer en justifiant les limites de f en 0 et en +∞

b) Montrer que pour tout x appartenant à]0;+∞[, on a $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$

c) Etudier le sens de variation de la fonction f sur]0;+∞[

d) Etudier la convexité de f sur]0;+∞[

2) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]0;+∞[une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle [1;2]

b) Déterminer le signe de f(x) pour x ∈]0;+∞[

c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$

Partie B Etude de la fonction g

Soit g la fonction définie sur]0;1] par g(x) = $-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x$

On admet que la fonction g est dérivable sur]0;1] et on note g' sa fonction dérivée

1) Calculer $g'(x)$ pour x ∈]0;1] puis vérifier que $g'(x)=x\,f(\frac{1}{x})$

2) a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$

b) On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f(\frac{1}{x})$	||	+	0	-	

En déduire le tableau de variation de g sur l'intervalle]0;1] . Les images et les limites ne sont pas demandées