**EXERCICE 1** **5 points**

**Partie A**

1. Par lecture graphique :

| $x$ | $0$ | $1{,}5$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| variations de $f$ | $-5{,}5$ $\nearrow$ | $2{,}4$ | $\searrow$ $0{,}35$ |

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1{,}5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1{,}5\,;\,5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée $f'$ de $f$ est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

   La fonction $f$ est concave sur $[0\,;\,2{,}5[$ puis convexe sur $]2{,}5\,;\,5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde $f''$ de $f$ est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si f correspond à la dérivée de F alors le signe de f donne les variations de F. Or on peut constater que sur [0;0,5], f est négative et F est croissante ce qui n'est pas cohérent donc $C_3$ ne peut pas représenter F

**Partie B**

1. **a.** $f$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.
   On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x+1}$.
   $f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel $x$ positif :
   $f'(x) = 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (4x-2) = (4-4x+2)\mathrm{e}^{-x+1} = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

   **b.** Déterminons le signe de $-4x+6$ : $\quad -4x+6 > 0 \iff 6 > 4x$

   $$\iff \frac{3}{2} > x$$

   les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4\times 0 - 2)\mathrm{e}^{-0+1} = -2\mathrm{e}$

   et $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (la limite en $+\infty$ est admise).

   *Remarque :* On a $-2\mathrm{e} \approx -5{,}43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A** et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}43$, là aussi, conforme.

   On a donc le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-4x+6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $\mathrm{e}^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f$ | $-2\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**c.** Pour tout réel $x$ positif on a :

$f''(x) = -4 \times e^{-x+1} - 1 \times e^{-x+1} \times (-4x+6) = (-4+4x-6)e^{-x+1} = (4x-10)e^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$ : $4x-10 > 0 \iff 4x > 10$

$$\iff x > \frac{5}{2}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4x-10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $e^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc concave sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

2. a) La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}426$ soit 2,43 m au centimètre près

b) On veut donc couvrir une surface de : $\frac{75}{100} \times 4{,}82\ m^2$ soit environ $3{,}62 m^2$ . De plus : $\frac{3{,}62}{0{,}8} \approx 4{,}525$ Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

## Exercice 2 :

### Partie A

**1.** Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 5,7 % des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0{,}057$.

**2. a.**
- On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès : « l'individu choisi a déjà été infecté », a une probabilité $p = 0{,}057$ ;
- Cette épreuve est répétée $N = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car le prélèvement des 100 individus est assimilé à un tirage avec remise) ;
- $X$ est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces répétitions.

Avec ces éléments, on peut affirmer que $X$ suit la loi binomiale de paramètres $N = 100$ et $p = 0{,}057$.

*Remarque :* le paramètre donnant le nombre de répétitions est souvent noté $n$, plutôt que $N$, mais dans la question **2. e.**, un entier $n$ est introduit, donc pour éviter le conflit de notation, on utilise $N$ ici.

**b.** Puisque $X$ suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0{,}057 = 5{,}7$. On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.

**c.** La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.

Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour $k$ entier naturel inférieur à $n$) : $P(X = k) = \binom{N}{k} \times p^k \times (1-p)^{N-k}$.

On a donc, ici : $P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0{,}057^0 \times 0{,}943^{100} = 0{,}943^{100} \approx 0{,}0028$.

**d.** La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :

$P(X \geqslant 2) = 1 - P\left(\overline{X \geqslant 2}\right) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).

À la calculatrice, on obtient : $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}9801$.

**e.** Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leqslant 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}8829$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}9408$.

L'entier cherché est 9.

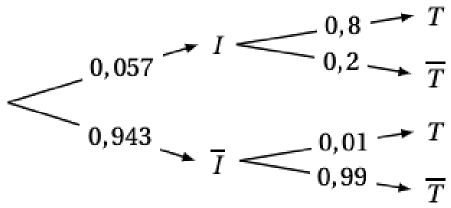
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

**Partie B**

1. L'évènement $I$ est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.

   - La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
   - celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right) = 0,99$.

   Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :

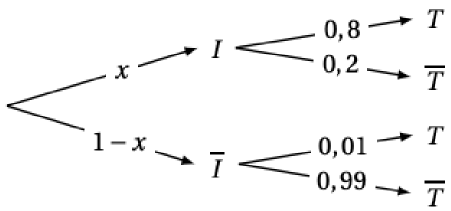



2. Les évènements $I$ et $\overline{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P\left(I \cap T\right) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,055\,03$.

3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.
   D'après la définition des probabilités conditionnelles :
   $P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{0,057 \times 0,8}{0,055\,03} = \dfrac{4560}{5503} \approx 0,828\,6$.
   Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,828 6 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

**Partie C**

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la $x$.
On a donc l'arbre suivant :




Les évènements $I$ et $\overline{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P\left(I \cap T\right) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01$.
D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.
On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$
Résolvons : $0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,284\,4$

$$\iff x = \frac{0,284\,4}{0,79}$$
$$\iff x = \frac{2\,844}{7900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\dfrac{2\,844}{7900} = 0,36$.
Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.

## Exercice 3 **5 points**

1. On considère une suite $(t_n)$ vérifiant la relation de récurrence :
pour tout entier naturel $n$, $t_{n+1} = -0,8t_n + 18$.

**Affirmation 1** : La suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Pour tout $n$ : $w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0,8t_n + 18 - 10 = -0,8t_n + 8 = -0,8(t_n - 10)$
$= -0,8w_n$

Donc la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $-0,8$.

**Affirmation 1 vraie**

2. Soit la suite $(S_n)$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$.

La suite $(u_n)$ est définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

**Affirmation 2** : La suite $(u_n)$ converge.

$n > 0$ donc
$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$. entraîne $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est-à-dire $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{4}{n} = 3$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$
- Pour tout $n > 0$ : $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

**Affirmation 2 vraie**

3. Soit la suite $(v_n)$ définie par : $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.

**Affirmation 3** : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

On va démontrer cette propriété par récurrence.

- **Initialisation**
Pour $n = 1$ : $v_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
On suppose la propriété vraie au rang $n$, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$ (hypothèse de récurrence).
$v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n} = 2 - \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-n}{n+1} = \dfrac{2n+2-n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$

5. On considère la suite $(u_n)$ définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de $u_n$.

A noter que dans cette solution la suite est définie à l'aide d'un algorithmme

- 

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que $(u_n)$ est décroissante et vérifie pour tout $n$ : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

**Affirmation 5** : La suite $(u_n)$ converge vers $\sqrt{2}$.

D'après le script Python, $(u_n)$ est définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 0,5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$ pour tout $n$

- La suite $(u_n)$ est décroissante.
- Pour tout $n$, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ donc la suite est minorée par $\sqrt{2}$.
- D'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ tel que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

De l'égalité $u_{n+1} = 0,5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, on déduit : $\ell = 0,5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.

On résout cette équation.

$\ell = 0,5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell} \iff \ell = \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \iff \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$

On a vu que $\ell \geqslant \sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$.

**Affirmation 5 vraie**

## Exercice 4

1. D'après le texte :
   - $a_1 = a_0 - \dfrac{15}{100}a_0 + \dfrac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
   - $b_1 = b_0 - \dfrac{10}{100}b_0 + \dfrac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$
2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel $n$, $a_n + b_n = 3000$.
3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100}b_n$.
   Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$. On a alors :
   $a_{n+1} = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100}(3000 - a_n) = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100} \times 3000 - \dfrac{10}{100}a_n$
   $= a_n - \dfrac{25}{100}a_n + 300 = \dfrac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300$
4. **a.** Soit la propriété : $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.
   - **Initialisation**
     $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$
     Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété vraie au rang $n$, soit $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.
     $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$
     $\iff 0,75 \times 1200 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 0,75 \times 1700$
     $\iff 900 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 1275$
     $\iff 900 + 300 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0,75 \times a_n + 300 \leqslant 1275 + 300$
     $\iff 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575$
     Or $1575 \leqslant 1700$ donc $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$.
     La propriété est donc vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ ; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout $n$, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

   **b.** Étude de la convergence de la suite $(a_n)$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite $(a_n)$ est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_n$ donc la suite $(a_n)$ est minorée.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout $n$ par $v_n = a_n - 1200$ ; donc $a_n = v_n + 1200$.
   **a.** $v_{n+1} = a_{n+1} - 1200 = 0,75a_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900$
   $= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n$
   $v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$
   Donc $(v_n)$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

   **b.** On en déduit que, pour tout $n$, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.
   **c.** On sait que, pour tout $n$, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. **a.** $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$ ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200$.
   **b.** On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3000 - 1200 = 1800$.
7. **a.** On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de $n$ à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while A>=1280 :
        n=n+1
        A = 0.75*A + 300
    return n
```

   **b.** La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de $n$ telle que $a_n < 1280$. On résout cette inéquation.
   $a_n < 1280 \iff 500 \times 0,75^n + 1200 < 1280 \iff 500 \times 0,75^n < 80$
   $\iff 0,75^n < \dfrac{80}{500} \iff \ln(0,75^n) < \ln(0,16) \iff n\ln(0,75) < \ln(0,16)$
   $\iff n > \dfrac{\ln(0,16}{\ln(0,75)}$
   Or $\dfrac{\ln(0,16}{\ln(0,75)} \approx 6,38$ donc la valeur de $n$ renvoyée par la fonction `seuil` est 7.