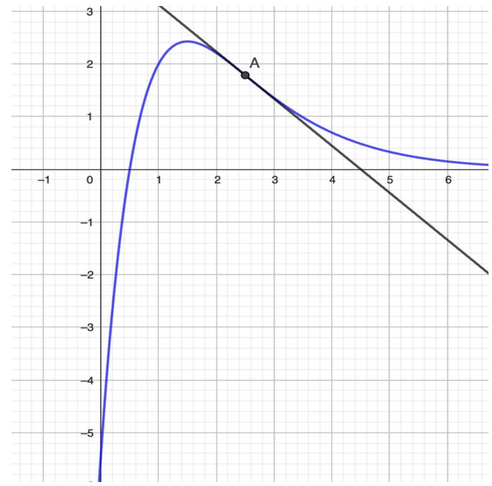
Baccalauréat SPÉCIALITÉ MATHEMATIQUES TB

Mardi 5 novembre
Calculatrice en mode examen
4 heures

La rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

<u>Exercice 1</u> (5 points)



Partie A

On considère une fonction f définie sur ¿, représentée par la courbe C ci-contre.

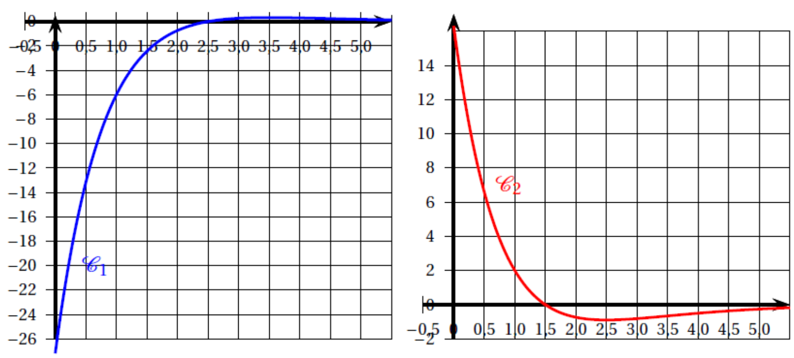
La droite T est tangente à la courbe C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.

1 Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 5].

2 Que semble présenter la courbe C au point A ?

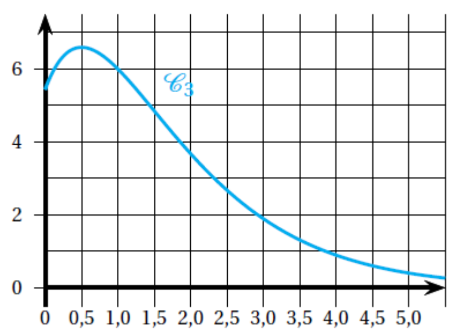
3 La dérivée f' et la dérivée seconde f''de la fonction f sont représentées par les courbes ci-contre.

Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
Ce choix sera justifié.



Courbe $\mathscr{C}_1$ Courbe $\mathscr{C}_2$

4 La courbe C_3 ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur ¿ d'une fonction F qui vérifie F' = f ?
Justifier.



Partie B

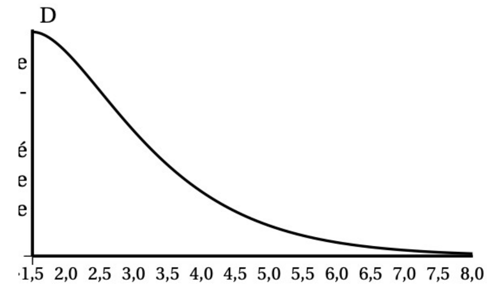
Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur ¿, est définie par

$$f(x)=(4x-2)e^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. **Étude de la fonction f**
   (a) Montrer que $f'(x)=(-4x+6)e^{-x+1}$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f
   (c) Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle. Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. On admet que cette aire vaut envirno 4,82 m^2
L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0{,}8$ m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19

Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

(a) Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
(b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
(c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
(d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
(e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

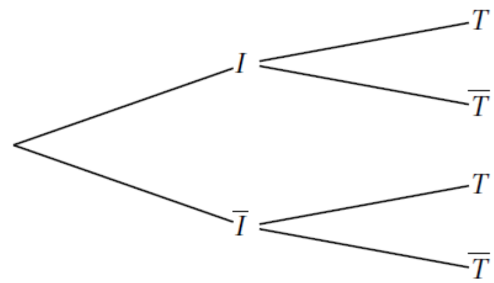
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test: sa sensibilité et sa spécificité :

- La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).
- La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes:

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.et on note T l'évènement le test réalisé est positif



1 Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé :

2. Montrer que $p(T)=0{,}05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité $0{,}8$ et de spécificité $0{,}99$.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de $29{,}44\,\%$.
On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?
Indication : On pourra noter $P(I)=x$ la probabilité que l'adulte ait déjà été infecté par la COVID 19 et utiliser la formule des probabilités totales.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1 On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\textit{Pour tout entier naturel } n, t_{n+1}=-0{,}8\,t_n+18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=t_n-10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n-4\leqslant S_n\leqslant 3n+4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n=\dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1=2 \textit{ et pour tout entier naturel } n\geqslant 1, v_{n+1}=2-\frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_n=\dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$

On admet que la suite est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n : $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$

Affirmation 4 La suite converge vers $\sqrt{2}$

Exercice 4 (5 points)

On étudie un groupe de 3000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1700 membres et le club B en compte 1300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, $15\,\%$ des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, $10\,\%$ des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 300.$$

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

(b) En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
(b) Exprimer v_n en fonction de n.
(c) En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200$.

6. (a) Déterminer la limite de la suite (a_n).
(b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

.

7. (a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while ... :
          n=n+1
          A = ...
     return...
```

c Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.