DS limite TVI Terminale Spécialité mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction dérivable sur ℝ définie par f(x) = $x^3 e^x$

1) Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$

f est un produit de fonctions dérivables sur ℝ donc f est dérivable sur ℝ et on a :

$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3)e^x = x^2 e^x (x+3)$

2) Justifier que le tableau de variations de f sur ℝ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27e^{-3}$	↗	$+\infty$

- on sait que $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout entier n donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27e^{-3}$
- la limite en $+\infty$ est facile
- Etudions le signe de f' . Ce signe est celui de x+3 car x² et e^x sont positifs d'où

  pour x ≥ -3 , $f'(x) \geq 0$ et f croissante

  pour x ≤ -3 , $f'(x) \leq 0$ et f décroissante

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse .

Justifier chaque réponse

Affirmation 1 On sait que la fonction f vérifie pour tout x ∈ ℝ , $4 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 4 + \frac{5}{x}$

A-t-on $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$?

VRAI Facile c'est un théorème des gendarmes

Affirmation 2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$

FAUX

$\frac{e^x}{e^x + x} = \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}$. On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par inverse $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 1$

Affirmation 3

La courbe représentative de la fonction k définie par k(x) = $\frac{2e^x}{e^x+1}$ admet deux asymptotes horizontales

VRAI on calcule les limites en $\pm\infty$.

en $-\infty$, pas de problème on trouve 0 donc asymptote horizontale y = 0

en $+\infty$, k(x) = $\frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}$ On peut alors calculer la limite et on trouve 2 donc 2ème asymptote horizontale y = 2

Affirmation 4 On donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	7

L'équation f(x) = 1 admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

FAUX

- Sur $]-\infty;-2]$, f est continue et strictement croissante et on a $f(]-\infty;-2]) =]-\infty;4]$ comme $1 \in]-\infty;4]$, d'après le corollaire du TVI, l'équation f(x) = 1 admet une solution sur $]-\infty;-2]$
- On peut procéder de même sur les intervalles [-2;3] et $[3;+\infty[$ avec à chaque fois une solution donc au final il y a trois solutions à l'équation

Exercice

Partie A

1) $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = 36 - 60 < 0$ donc pas de racine et le polynôme est du signe de a c'est à dire p'(x) > 0 d'où p est croissante sur [-3;4]

2) $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

p est un polynôme continue et strictement croissant sur [-3;4] et on a p([-3;4]) = [-68;37] comme 0 ∈ [-68;37], d'après le corollaire du TVI, l'équation p(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in$ [-3;4]

3) La calculatrice donne α env $-0{,}2$ (intervalle $[-0{,}18;-0{,}17]$

4)

x	-3 $\quad$ α $\quad$ 4
Singe de p(x)	- $\quad$ 0 $\quad$ +

Partie B

1) a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x^2) - 2x \times e^x}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$

b) on calcule $f'(1)$ = ... = 0 d'où la réponse

2) a) il semble y avoir deux points d'inflexion, l'un entre -1 et 0 et l'autre entre 1 et 2

b) points d'inflexion ssi $f''(x) = 0$ en changeant de signe

le signe de f'' est celui de $p(x)(x-1)$ car e^x et $1+x^2$ sont positifs d'où

x	-3 $\quad$ α $\quad$ 1 $\quad$ 4
$x-1$	- $\quad$ ⋮ $\quad$ - $\quad$ 0 $\quad$ +
$p(x)$	- $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ ⋮ $\quad$ +
$f''(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ - $\quad$ 0 $\quad$ +

f'' s'annule donc deux fois en changeant de signe donc deux points d'inflexion

ssi x = α ou x = 1

donc on a de bonnes sensations

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle [−3 ; 4] par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle [−3 ; 4].
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle [−3 ; 4] une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle [−3 ; 4].

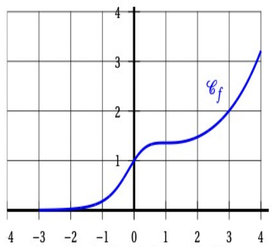
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [−3 ; 4] par :

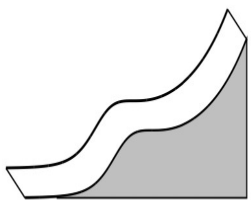
$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle [−3 ; 4].
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle [−3 ; 4] :

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.