DS limite TVI Terminale Spécialité mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction dérivable sur ℝ définie par f(x) = $x^3 e^x$

1) Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$

2) Justifier que le tableau de variations de f sur ℝ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-27e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse .

Justifier chaque réponse

Affirmation 1 On sait que la fonction f vérifie pour tout x ∈ ℝ , $4+\frac{3}{x} \leq f(x) \leq 4+\frac{5}{x}$

A-t-on $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$?

Affirmation 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$

Affirmation 3

La courbe représentative de la fonction k définie par k(x) = $\frac{2e^x}{e^x+1}$ admet deux asymptotes horizontales

Affirmation 4 On donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	7

L'équation f(x) = 1 admet deux solutions sur ℝ

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

Partie B

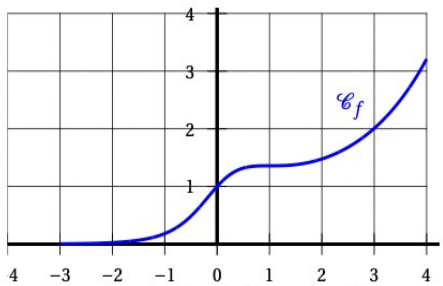
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

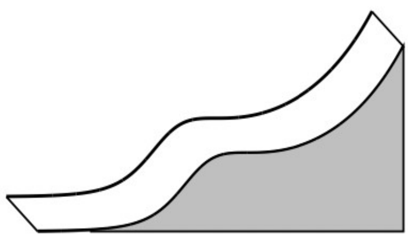
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.

   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.