Interrogation Terminale

Vendredi 22 mars 2024

Exercice 1 Calculer les integrales suivantes :

$$I = \int_0^1 e^{1-2x}\,dx \qquad\qquad J = \int_0^1 \frac{1}{(3x+4)^4}\,dx$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}e^{1-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{1}$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{3}u'u^{-4}\,dx = \left[\frac{1}{-9}u^{-3}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{-9(3x+4)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{-9\times7^3} + \frac{1}{9\times4^3} = -\frac{1}{3087}+\frac{1}{576} = \frac{2511}{1778112}$$

Exercice 2 **Les deux questions sont indépendantes**

1) On considère l'intégrale I suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\,dx$

a) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\frac{x^2}{x+2} = x-2+\frac{4}{x+2}$ (facile)

b) En déduire la valeur exacte de I

$$I = \int_0^1 x-2+\frac{4}{x+2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2x+4\ln(x+2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}-2+4\ln3-4\ln2 = -\frac{3}{2}+4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

2) On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$

a) Calculer $I-3J$ et $I+J$

$$I-3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = [\ln(e^x+4)]_0^{\ln 16} = \ln 20-\ln 5 = \ln 4$$

$$I+J = \int_0^{\ln 16} 1\,dx = [x]_0^{\ln 16} = \ln 16$$

b) En déduire les valeurs de I et de J

$$(I+J)-(I-3J) = \ln 16-\ln 4$$

$$4J = \ln 4 = 2\ln 2$$

$$J = \frac{\ln 2}{2}$$

d'où $I = \ln 16 - J = \ln 16-\frac{\ln 2}{2} = 4\ln 2-\frac{\ln 2}{2} = \frac{7\ln 2}{2}$

Exercice 3

On considère la suite (I_n) définie pour tout n $\in \mathbb{N}$, par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}x$

a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par partie

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

on pose $u(t) = \mathrm{t}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$

$u'(t) = 1$ v(t) = $-\mathrm{e}^{-t}$

$$\mathrm{I}_1 = [-t\,\mathrm{e}^{-t}]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1}+0-[e^{-t}]_0^1 = -2\mathrm{e}^{-1}+1$$

b) Montrer que la suite (I_n) est positive

sur [0;1], la fonction $t^n \mathrm{e}^{-t}$ est positive donc selon la règle de positivité de l'intégrale, $\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}x$ est positive

c) En remarquant que pour tout t $\in$ [0;1] , $\frac{1}{\mathrm{e}} \le \mathrm{e}^{-t} \le 1$, démontrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}} \le \mathrm{I}_n \le \frac{1}{n+1}$$

$\frac{1}{\mathrm{e}} \le \mathrm{e}^{-t} \le 1$ donc comme t est positif , $\frac{t^n}{\mathrm{e}} \le t^n \mathrm{e}^{-t} \le t^n$

On intègre l'inégalité $\frac{t^n}{\mathrm{e}} \le t^n \mathrm{e}^{-t} \le t^n$ sur [0;1] possible d'après la règle de compatibilité avec l'ordre :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\mathrm{e}} \mathrm{d}t \le \mathrm{I}_n \le \int_0^1 t^n \mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{t^{n+1}}{\mathrm{e}(n+1)}\right]_0^1 \le \mathrm{I}_n \le \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

d) En déduire la limite de la suite (I_n)

Th des gendarmes la limite vaut 0