Interrogation dénombrement Terminale

Jeudi 15 février

Exercice 1 Il s'agit s'un QCM. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses .
Indiquer lesquelles sans justifier

1) Le nombre de manières de placer cinq manteaux sur un porte manteau à cinq patères sans mettre un manteau sur l'autre est :

a) 5^2 b) $5!$ nombre de permutation de 5 elts c) 2^5
d) 120 = 5!

2) Dans une classe de 17 filles et 12 garçons, on souhaite élire deux délégués, l'un étant une fille l'autre un garçon. Le nombre de couple possibles est :

a) 17×12 17 filles et 12 garçons

b) $17!\times 12!$ c) $\binom{29}{2}$ d) $17+12$

3) on tire une à une sept cartes dans un paquet de douze cartes. Le nombre de tirages différents est : nombre d'arrangements de 7 élts parmi 12

a) $\binom{12}{7}$ **b)** $\frac{12!}{5!}$ c) $\frac{12!}{7!}$ d) 95040

4) Parmi les réponses suivantes, lesquelles sont des permutations de l'ensemble { 1 ; 2 ; 3 ; 4 } ?

une permutation est une liste donc parenthèses

a) (4 ; 3 ; 1 ; 2) b) (1 ; 2 ; 4) c) { 1 ; 2 ; 4 ; 3 } d) (1 ; 3 ; 2 ; 4)

5) Combien de nombre à quatre chiffres peut-on écrire en utilisant seulement les chiffres de 1 à 6 , un chiffre ne pouvant pas être utilisés à deux reprises

a) 6^4 b) $\frac{6!}{2!}$ c) $\frac{6!}{4!}$ d) $6\times 5\times 4\times 3$

6) Un ensemble E possède 210 2-arrangements . Quel est le cardinal de cet ensemble ?

Le nombre de 2 liste d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$ On a donc ici :

$\frac{n!}{(n-p)!}$ = 210 $\frac{n!}{(n-2)!}$ = 210 $n(n-1)=210$ $n^2-n-210=0$ ... n = 15

a) 15 b) 21 c) 105 d) 210

ordre 1) b d 2) a 3) b 4) a d 5) b d 6) a

Exercice 2

1 Simplifier l'écriture suivante : $\frac{(n+5)!}{(n+7)!}$.

2 Ecrire ce nombre à l'aide de factorielles : $A = \frac{9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}$.

3 Calculer « à la main » $\binom{5}{3}$ en écrivant les calculs.

4 En vous servant de $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{7}{4} = 35$,donner $\binom{8}{4}$.

5 Démontrer que : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. (démonstration du cours)

1) $\frac{(n+5)!}{(n+7)!} = \ldots = \frac{1}{(n+7)(n+6)}$ 2) A = $\frac{9!}{4!\times 6!}$

3) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2} = 10$

4) D'après la formule de pascal, $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4} = 70$

5) Voir cours

Exercice 3

Un anagramme est un mot obtenu par la permutation des lettres d'un mot donné.

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre d'anagrammes du mot PATRICE en expliquant clairement la méthode utilisée.
   a) Commençant et finissant par une consonne.
   b) Commençant et finissant par une voyelle.
   c) Commençant par une consonne et finissant par une voyelle.
2) Déterminer le nombre d'anagramme du mot : ANAGRAMME

1) important : aucune répétition de lettres 4 consonnes et 3 voyelles

a) 4 choix pour la première lettre et trois pour la dernière . Reste alors à placer 5 lettres parmi les cinq restantes : $4\times 5!\times 3 = 1440$

b) 3 choix pour la premère et 2 pour la dernière puis permuations de 5 èlèments donc :
$3\times 5!\times 2 = 720$

c) 4 choix pour la première et 3 pour la dernière puis permuations de 5 èlèments donc
$4\times 5!\times 3 = 1440$

2) 9 lettre donc 9 ! anagrammes possibles mais 3 lettres A et 2 lettres M donc $\frac{9!}{3!\times 2!} = 30240$

Exercice 4

Soit un groupe de n personnes. On cherche à déterminer la probabilité d'avoir au moins deux personnes dans ce groupe ayant la même date d'anniversaire. On suppose que toutes les années sont de 365 jours et que la répartition des dates de naissance sur la population est homogène.

1) a) Déterminer le nombre de répartitions possibles de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes.

   b) Déterminer le nombre de répartitions possibles de dates distinctes d'anniversaire dans un groupe de n personnes.

   c) En déduire la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire dans un groupe de n personnes.

2) On souhaite connaître, à partir de quelle valeur de n la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire est supérieur à 95 %.

   Pour cela on écrit le programme suivant en Python

   a) Quelle probabilité calcule le programme ?
   Expliquer la formule utilisée.

   b) Quel résultat donne ce programme ?
   Pourquoi parle-t-on de paradoxe des anniversaire ?

```
n=1
p=1
while p>=0,05:
    n=n+1
    p=p*(365-n+1)/365
print(n)
```

n est évidemment inférieur à 365

1) a) il s'agit du nombre de n listes d'un ensemble à 365 élèments il y en a 365^n

b) n listes d'élèments distincs donc $\dfrac{365!}{(365-n)!}$

c) avoir au moins deux personnes avec la même date est le contraire d'aucune personne n'a la même date il y en a $365^n - \dfrac{365!}{(365-n)!}$ donc la proba est $\dfrac{365^n - \dfrac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$

2) a) Ce programme programme calcule la probabilité d'avoir des dates d'anniversaire distinctes.

   Pour éviter d'être hors capacité, il décompose le calcul de la façon suivante :

$$\frac{365\,!}{(365-n)\,! \times 365^n} = \underbrace{1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}}_{n \text{ termes}}$$

   b) On trouve : $n = 47$ avec une probabilité de $0,955$.
   Ce résultat va à l'encontre de l'intuition, car l'on pense souvent que le nombre de personnes doit être beaucoup plus élevé pour obtenir 95 % de réussite.
   D'où le mot paradoxe.