DM Terminale A

Exercice 1 :

a) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul , par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Etudier le sens de variation de la suite

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$ < 0 donc $u_{n+1} < u_n$ la suite est décroissante

b) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2}$$ où (a_n) est une suite arithmétique de raison 8

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \times (a_1 + a_1 + 8(n-1))}{2} = n(a_1 + 4(n-1)) = 4n^2 + (a_1 - 4)n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^2} = \frac{n^2\left(4 + \frac{a_1 - 4}{n}\right)}{n^2} = 4 + \frac{a_1 - 4}{n}$$ la limite est donc 0

Exercice 2

Etude des variations d'une fonction
1) Recherche de l'intervalle de définition
2) Etude de la parité de la fonction
3) Calcul de la dérivée
4) Etude du signe de la dérivée
5) Tracé du tableau de variation le plus complet possible

Appliquer le schéma ci-dessus pour étudier les fonctions ci-dessous

a) f(x) = $\exp(\sqrt{x^2+1})$

x^2+1 est > 0 pour tout x donc $D_f = \mathbb{R}$.

$f(-x) = \exp(\sqrt{(-x)^2+1}) = \exp(\sqrt{x^2+1})$ donc fonction paire on peut l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \exp(\sqrt{x^2+1}) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et par symétrie décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	

b) f(x) = $x-\sqrt{|4x-x^2|}$ D_f = $\mathbb{R}$.

f n'est ni paire ni impaire f(-x) ≠ f(x) et f(-x) ≠ -f(x)

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- pour tout x ∈ $]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$, f(x) = $x-\sqrt{x^2-4x}$ et $f'(x)$ = $\dfrac{\sqrt{x^2-4x}-(x-2)}{\sqrt{x^2-4x}}$

Si x ≤ 0 , alors $x-2$ < 0 d'où $f'(x)$ ≥ 0 et f est croissante

Si x ≥ 4 , cherchons à résoudre $\sqrt{x^2-4x}-x+2>0$

$$\sqrt{x^2-4x}>x-2$$
$$x^2-4x>(x-2)^2$$
$$x^2-4x>x^2-4x+4$$
$$0>4$$

ce qui est faux ainsi $\sqrt{x^2-4x}-x+2<0$ et $f'(x)$ < 0 et f décroissante

- pour tout x ∈ [0;4] , f(x) = $x-\sqrt{4x-x^2}$ et $f'(x)$ = $\dfrac{\sqrt{4x-x^2}-(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$

Si x ∈ [2;4] , $2-x$ ≤0 donc $f'(x)$ ≥ 0 et f croissante

Si x ∈ [0;2] , cherchons à résoudre $\sqrt{4x-x^2}-(2-x)\geq 0$

$$\sqrt{4x-x^2}\geq 2-x\geq 0$$
$$4x-x^2\geq(2-x)^2$$
$$4x-x^2\geq 4-4x+x^2$$
$$2x^2-8x+4\leq 0$$
....
$$2-\sqrt{2}<x<2$$

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	

c) f(x) = $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$. On admettra que la dérivée du cosinus est : $(\cos x)' = -\sin x$

$f(x+2\pi) = f(x)$ donc fonction 2π périodique on peux l'étudier sur $]-\pi;\pi]$

$f(-x)$ = f(x) car $\cos(-x)=\cos(x)$ donc fonction paire étude sur $[0;\pi]$

$1+\cos x=0$ si et seulement si $\cos x = -1$

si et seulement si x = π 2π prés

On étudie sur $[0;\pi[$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$

Sur $[0;\pi[$ le sinus est positif donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante

x	0	π
$f'(x)$	-	‖
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	‖