DM2

n°71 p69

$v_{n+1} = \dfrac{1}{1-u_{n+1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2-u_n}} = \ldots = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$

$v_{n+1}-v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}-\dfrac{1}{1-u_n} = \dfrac{1-u_n}{1-u_n} = 1$

d'où suite arithmétique de raison 1 de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{1-u_1} = 1$

On a donc $v_n = v_1+(n-1)r = n$

$v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$

$\dfrac{1}{v_n} = 1-u_n$ d'où $u_n = 1-\dfrac{1}{v_n} = 1-\dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$

En factorisant par n on trouve une limite de 1

n°73 p69

1) $u_n = \dfrac{a+\dfrac{b}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}$ la limite est donc de $\dfrac{a}{2}$ donc limite fixe la suite ne peut être divergente

2) Pour u_n il faut choisir a = 1 pour une limite de $\dfrac{1}{2}$; $u_n = \dfrac{n+b}{2n+1}$

On a alors $v_n = n\left(2\times\dfrac{n+b}{2n+1}-1\right) = n\times\dfrac{2n+2b-2n-1}{2n+1} = \dfrac{2b-1}{2+\dfrac{1}{n}}$

La limite de v_n est alors de $\dfrac{2b-1}{2}$

on veut donc $\dfrac{2b-1}{2} = \dfrac{1}{2}$ d'où 2b-1 = 1 e donc b = 1

n°73 p35

1) $u_{n+1}-u_n = \dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n-1}{2n-1} = \dfrac{n(2n-1)-(n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{2n^2-n-2n^2-n+2n+1}{(2n+1)(2n-1)} =$

$\dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$ positif pour tout n ≥ 1 donc suite croissante

2) $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times4\times\ldots\times2n\times(2n+2)} - \dfrac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n}$

$$= \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n} * \left[\frac{2n+1}{2n+2}-1\right]$$

$$= \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n} * \left(-\frac{1}{2n+2}\right)$$ qui est négatif donc suite décroissante

3) $u_{n+1}-u_n = \ldots = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$ positif donc suite croissante

4) On démontre par récurrence que $u_{n+1}\leq u_n$

5) $u_{n+1}-u_n = (n+1)!-n! = n!(n+1-1) = n!\times n$ positif donc suite croissante