DM1

1) Init : n=0

$$\frac{3}{2}\times 0^2-\frac{17}{2}\times 0=0=u_0$$ donc relation vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $u_n = \frac{3}{2}\times n^2-\frac{17}{2}\times n$

DQ $u_{n+1} = \frac{3}{2}\times(n+1)^2-\frac{17}{2}\times(n+1) = \frac{3}{2}n^2 \ -\frac{11}{2}n \ +\frac{14}{2}$

On sait que $u_n = \frac{3}{2}\times n^2-\frac{17}{2}\times n$ donc

$$u_n + 3n-7 = \frac{3}{2}\times n^2-\frac{17}{2}\times n + 3n - 7$$

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}n^2-\frac{11}{2}n-7$$

La proposition est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité elle est vraie pour tout n ≥ 0

2) a) $v_n = u_{n+1}-u_n = u_n+3n-7-u_n = 3n-7$

$v_{n+1}-v_n = 3(n+1)-7-(3n-7) = 3$

(v_n) est donc arithmétique de raison 3 de premier terme $v_0=3\times 0-7=-7$

b) $S_n = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1} = u_1-u_0+u_2-u_1+u_3-u_2+\ldots+u_n-u_{n-1}$

On constate que tous s'éliminent sauf u_n-u_0 d'où la réponse

c) $S_n = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1} = -7+3\times 1-7+3\times 2-7+\ldots+3(n-1)-7$

$= -7-7-\ldots-7 + 3\times(1+2+3+\ldots+(n-1))$

$$= -7\times n + \frac{3\times(n-1)\times n}{2} = -7n+\frac{3n^2}{2}-\frac{3n}{2} = \frac{3n^2}{2}-\frac{17n}{2}$$

69 **Raisonner, calculer**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+3n-7$.

On souhaite démontrer qu'une formule explicite pour cette suite est $u_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{2}n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

1. Un raisonnement par récurrence

Démontrer la formule précédente en utilisant un raisonnement par récurrence.

2. Un raisonnement direct

On considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme −7.

b. On considère, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la somme $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$.
Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$S_n=u_n-u_0.$$

c. Calculer cette somme d'une autre manière.

d. Comparer les deux expressions obtenues et conclure.

3. Dans le cas général

On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+an+b$. Les nombres u_0, a et b sont des nombres réels connus.
On souhaite déterminer une formule explicite pour cette suite.
Considérer la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+1}-u_n$ et utiliser le même raisonnement qu'à la question précédente pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, u_0, a et b, pour tout entier naturel n.

d) On a donc $S_n = u_n - u_0 = \frac{3n^2}{2} - \frac{17n}{2}$ ce qui donne $u_n = \frac{3n^2}{2} - \frac{17n}{2} + u_0 = \frac{3n^2}{2} - \frac{17n}{2} + 0$

Cas général

$v_n = u_{n+1} - u_n$ = an+b

On a donc $S_n = u_n - u_0$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = b + a \times 1 + b + a \times 2 + b + \ldots + a \times (n-1) + b \\ &= b + b + \ldots + b + a \times (1 + 2 + \ldots + n - 1) \\ &= n \times b + a \times \frac{(n-1) \times n}{2} \end{aligned}$$

on en déduit donc que $u_n = n \times b + a \times \frac{(n-1) \times n}{2} + u_0$

$$= \frac{an^2}{2} + \left(b - \frac{a}{2}\right) n + u_0$$