Bac Blanc n°3 Classe de terminale Spécialité mathématiques

4 heures

Le 15 avril 2024 **Calculatrice en mode examen**

Exercice 1 Nouvelle calédonie 2022

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On peut affirmer que :

a) la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ b) la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

c) la suite (u_n) n'a pas de limite d) la suite (u_n) convergente

la limite de la suite est 0 donc suite convergente réponse D

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation : $w_n = e^{-2v_n}+2$

2) Soit a un nombre réel strictement positif . On a $v_0 = \ln(a)$.

a) $w_0 = \dfrac{1}{a^2}+2$ b) $w_0 = \dfrac{1}{a_1^2+2}$ c) $w_0 = -2a+2$ d) $w_0 = \dfrac{1}{-2a}+2$

$w_0 = e^{-2v_0}+2 = e^{-2\ln(a)}+2 = e^{\ln(a^{-2})}+2 = e^{\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)}+2 = \dfrac{1}{a^2}+2$ **réponse A**

3) On sait que la suite (v_n) est croissante . On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a) décroissante et majorée par 3 b) décroissante et minorée par 2

c) croissante et majorée par 3 d) croissante et minorée par 2

la suite (v_n) est croissante donc $v_n < v_{n+1}$ d'où $-2v_n > -2v_{n+1}$ .... $w_n > w_{n+1}$ (w_n) décroissante

On sait que $w_0 = \dfrac{1}{a^2}+2 > 2$ donc **réponse B**

4) On considère la suite (a_n) ainsi définie : $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{8}{3}$

Pour tout entier naturel n, on a :

a) $a_n = 4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 2$ b) $a_n = -\dfrac{2}{3^n}+4$

c) $a_n = 4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d) $a_n = 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{8n}{3}$

En utilisant $a_0 = 2$, on élimine la réponse c)

Ensuite , avec $a_1 = \dfrac{1}{3}a_0 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{10}{3}$, on élimine la réponse a)

$a_2 = \dfrac{1}{3}a_1 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{34}{9}$ donc on élimine la réponse d)

donc c'est la **réponse B**

5) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal

La courbe C_g admet :

a) une asymptote verticale et une asymptote horizontale

b) une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

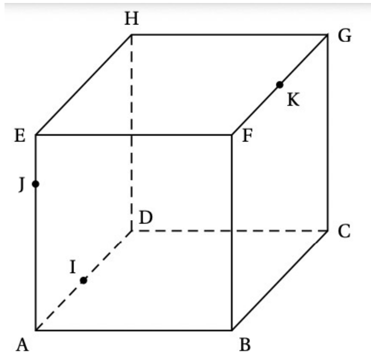
c) aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale

d) aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

<u>Exercice 2</u> Géométrie dans l'espace **5 POINTS**

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD]
- J est tel que $\vec{AJ}=\frac{3}{4}\vec{AE}$
- K est le milieu du segment [FG]



Partie A

1) Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de constructions sur la figure

on prolonge les droites (IJ) et (EH)

2) En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG)

on trace la droite (PK)

Partie B On se place désormais dans le repère orthonormé (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$)

1) a) Donner sans justification les coordonnées des points I , J et K

$$I\left(0;\frac{1}{2};0\right) \qquad J\left(0;0;\frac{3}{4}\right) \qquad K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}$ (4 ; a ; b) soit orthogonal aux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$.

$\vec{IJ}\ \left(0;-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et $\vec{IK}\ (1;0;1)$

$\vec{n}\cdot\vec{IJ}=0$ donc $-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=0$

$\vec{n}\cdot\vec{IK}=0$ donc $4+b=0$ d'où b = -4 et a = -6

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x-6y-4z+3=0$

$\vec{n}$ (4 ; -6 ; -4) est normal àu plan donc l'équation du plan est de la forme $4x-6y-4z+d=0$

en utilisant le point I du plan on trouve d = 3 d'où la réponse

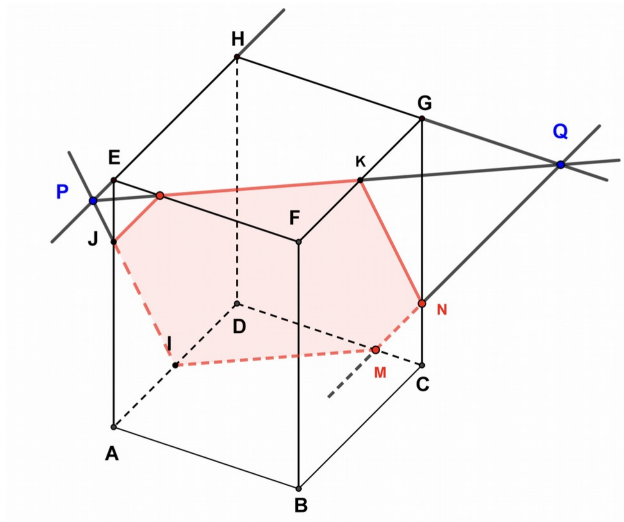
2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG)

C(1;1;0) et G(1;1;1) donc $\vec{CG}\ (0;0;1)$ d'où $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ t ∈ ℝ .

b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG)

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \\ 4x-6y-4z+3=0 \end{cases}$ d'où $4-6-4t+3=0$ donc t = $\frac{1}{4}$ donc $N\left(1;1;\frac{1}{4}\right)$

c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK)



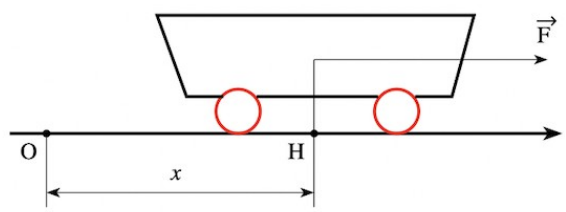
<u>Exercice 3</u> Equation différentielle   5 POINTS

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entrainement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N . Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de porportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s$.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes.

On prendra t dans l'intervalle [0;+∞[.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement : (E) : $25x'+200x''=50$



1) On note v(t) la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t)=x'(t)$

Prouver que x est solution de (E) si et seulement si v est solution de l'équation différentielle

(F) : $v'=-\frac{1}{8}v+\frac{1}{4}$.

$v(t) = x'(t)$ donc $v'(t) = x''(t)$ L'équation (E) : $25x'+200x''=50$ devient donc

$25v(t)+200v'(t)=50$ c'est à dire $v'(t)=\frac{-25v(t)+50}{200} = -\frac{1}{8}v(t)+\frac{1}{4}$

2) Résoudre alors l'équation différentielle (F)

Les solutions de l'éuqation (F) sont les fonctions de la forme $v(t) = Ce^{at}-\frac{b}{a}$

c'est à dire $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} - \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$

3) On suppose que, à l'instant t = 0, on a $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$

$x'(0)=v(0)=0$ on peut ainsi déterminer C $v(0) = Ce^{0}+2$ d'où 0 = C+2 c'est à dire C = -2

d'où v(t) = x'(t) = $-2e^{-\frac{1}{8}t}+2$

b) En déduire que l'on a pour tout nombre réel t positif : $x(t)=2t-16+16e^{-\frac{t}{8}}$

Il faut rechercher une primitive de x(t) d'où : x'(t) = $-2e^{-\frac{1}{8}t}+2$

donne x(t) = $-\dfrac{2}{-\frac{1}{8}}e^{-\frac{t}{8}}+2t+k = 16e^{-\frac{t}{8}}+2t+k$

On sait que x(0)=0 donc on trouve k = -16 d'où $x(t)=2t-16+16e^{-\frac{t}{8}}$

4) Calculer V = $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} -2e^{-\frac{t}{8}}+2$ = 2.

Pour quelles valeurs de t, la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?

Il faut résoudre $v(t) \leq \dfrac{90\,V}{100} = 1{,}8$

$-2e^{-\frac{1}{8}t}+2 \leq 1{,}8$

$e^{-\frac{t}{8}} \geq 0{,}1$

$-\dfrac{t}{8} \geq \ln(0{,}1)$

t $\leq -8\ln(0{,}1) = 18{,}42$

5) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?

On exprimera cette distance en mètres au décimètre près

On calcule $x(30)=60-16+16e^{-\frac{30}{8}}$ = 44,4 m au décimètre près

Exercice 4 **Fonctions, intégrales** **5 POINTS**

1) On considère la fonction g définie sur]0;+∞[par : $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$

on donne ci-dessous le tableau de variations de g

x	0	$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau

il faut démontrer deux limites et les variations et le 0 de g

les deux limites sont faciles

$g'(x) = \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ comme x est positif $g'(x)$ est la somme de deux positifs donc $g'(x)$ est positif et g est croissante

un TVI permet d'obtenir l'existence de x_0 entre 2,3 et 2,4

2) Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : f(x) = $\frac{5\ln x}{x}$

a) Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^{\,2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau de variations ci-dessus.

On sait que $g(x_0) = 0$ donc $\ln(x_0)-\frac{2}{x_0} = 0$ ce qui donne $\ln(x_0) = \frac{2}{x_0}$

on a donc $f(x_0) = \frac{5\ln(x_0)}{x_0} = \frac{5\times\frac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{10}{x_0^{\,2}}$

b) Soit a un réel . Pour a > 1 , exprimer l'intégrale J = $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a

J = $\int_1^a \frac{5\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x = u'u$ une primitive de $u'u$ est $\frac{u^2}{2}$ donc

J = $\left[5\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^a = \frac{5(\ln a)^2}{2}-0 = \frac{5\ln^2 a}{2}$

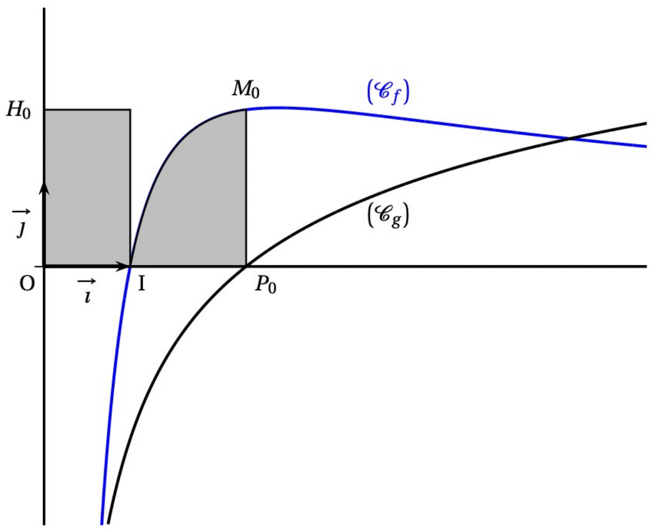
3) On a tracé dans le repére orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement C_f et C_g .

On appelle I le point de coordonnées $(1;0)$, P_0 le point d'intersection de C_g et de l'axe des abscisses, M_0 le point de C_f ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées .

On nomme D_1 le domaine du plan délimité par la courbe C_f et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$

On nomme D_2 le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de [OI] et $[OH_0]$

Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire



$P_0(x_0;0)$

g coupe l'axe des abscisses en x_0 donc M_0 a pour coordonnées $(x_0;f(x_0))$ c'est à dire $M_0\left(x_0;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$

$H_0\left(0;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$

L'aire du domaine D_2 est l'aire d'un rectangle de dimensions 1 et $\dfrac{10}{x_0^2}$ donc l'aire vaut $1\times\dfrac{10}{x_0^2} = \dfrac{10}{x_0^2}$

L'aire du domaine D_1 est donnée par : $\displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\,dx = \frac{5\ln^2(x_0)}{2}$ (on utilise la question 2)b))

or $\ln(x_0) = \dfrac{2}{x_0}$ donc l'aire du domaine D_1 est $\dfrac{5\times\left(\dfrac{2}{x_0}\right)^2}{2} = \dfrac{10}{x_0^2}$ **Les aires sont donc les mêmes**

On sait que $2{,}3<x_0<2{,}4$ donc $2{,}3^2<x_0^2<2{,}4^2$

$$5{,}29<x_0^2<5{,}76$$

$$\frac{1}{5{,}76}<\frac{1}{x_0^2}<\frac{1}{5{,}29}$$

$$\frac{10}{5{,}76}<\frac{10}{x_0^2}<\frac{10}{5{,}29}$$

$$1{,}736<\frac{10}{x_0^2}<1{,}890$$

L'aire est donc comprises entre 1,7 et 1,9

FEUILLE ANNEXE