Bac Blanc n°3 **Classe de terminale** **Spécialité mathématiques**

4 heures

Le 15 avril 2024 **Calculatrice en mode examen**

Exercice 1 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.* **5 POINTS**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point . Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse. Aucune justification n'est demandée .

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

On peut affirmer que :

a) la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ b) la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

c) la suite (u_n) n'a pas de limite d) la suite (u_n) convergente

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation : $w_n = e^{-2v_n}+2$

2) Soit a un nombre réel strictement positif . On a $v_0 = \ln(a)$.

a) $w_0 = \frac{1}{a^2}+2$ b) $w_0 = \frac{1}{a_1^2+2}$ c) $w_0 = -2a+2$ d) $w_0 = \frac{1}{-2a}+2$

3) On sait que la suite (v_n) est croissante . On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a) décroissante et majorée par 3 b) décroissante et minorée par 2

c) croissante et majorée par 2 d) croissante et minorée par 3

4) On considère la suite (a_n) ainsi définie : $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{8}{3}$

Pour tout entier naturel n, on a :

a) $a_n = 4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-2$ b) $a_n = -\frac{2}{3^n}+4$

c) $a_n = 4-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ d) $a_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8n}{3}$

5) On considère la fonction g définie sur l'intervalle **]0;+∞[** par g(x) = $\frac{e^x}{x}$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal

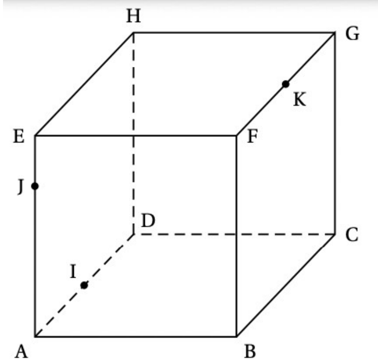
La courbe C_g admet :

a) une asymptote verticale et une asymptote horizontale
b) une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale
c) aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale
d) aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

Exercice 2 Géométrie dans l'espace — 5 POINTS

La figure ci-contre repérsente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD]
- J est tel que $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$
- K est le milieu du segment [FG]



Partie A

1) Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de constructions sur la figure
2) En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG)

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

1) a) Donner sans justification les coordonnées des points I , J et K

b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}$ (4 ; a ; b) soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x-6y-4z+3=0$

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG)

b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG)

c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK)

Partie C cette partie n'est pas obligatoire, ne la faire que si le reste est fait

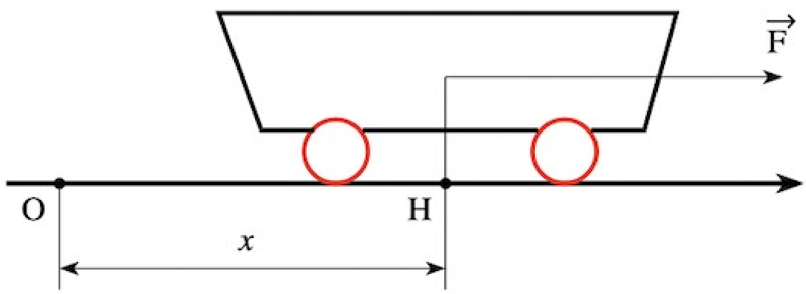
On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonal au plan (IJK)

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\0<z<1\end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Exercice 3 **Equation différentielle** **5 POINTS**

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entrainement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N . Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de porportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s$.



La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle [0;+∞[.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement :

$$(E) : 25x' + 200x'' = 50$$

1) On note v(t) la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$

Prouver que x est solution de (E) si et seulement si v est solution de l'équation différentielle

$$(F) : v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4} \quad .$$

2) Résoudre alors l'équation différentielle (F)

3) On suppose que, à l'instant t = 0, on a $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$

b) En déduire que l'on a pour tout nombre réel t positif : $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}$

4) Calculer V = $\lim_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t, la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?

5) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?

On exprimera cette distance en mètres au décimètre près

<u>Exercice 4</u> Fonctions, intégrales **5 POINTS**

1) On considère la fonction g définie sur]0;+∞[par : $g(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$

on donne ci-dessous le tableau de variations de g

x	0		$2{,}3$	x_0	$2{,}4$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau

2) Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : f(x) = $\dfrac{5\ln x}{x}$

a) Montrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^{\,2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau de variations ci-dessus.

b) Soit a un réel . Pour a > 1 , exprimer l'intégrale J = $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a

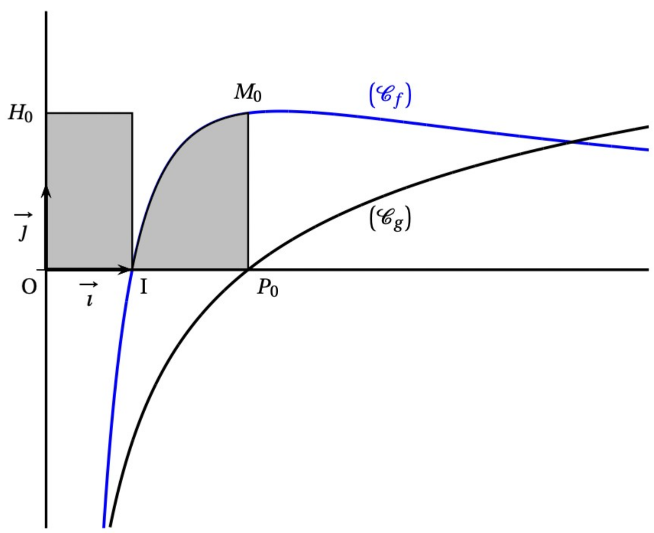
3) On a tracé dans le repére orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement C_f et C_g .

On appelle I le point de coordonnées $(1;0)$, P_0 le point d'intersection de C_g et de l'axe des abscisses, M_0 le point de C_f ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées .

On nomme D_1 le domaine du plan délimité par la courbe C_f et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$

On nomme D_2 le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de [OI] et $[OH_0]$

Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire



FEUILLE ANNEXE