Mini bac 2 Terminales Spécialité mathématiques

Le candidat traitera les exercices 1 , 2 et 3 .

L'exercice 4 est faculatitf, à ne faire que si le reste est traité

Le Lundi 22 janvier 2024

Exercice 1 7 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$

1) a) Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{1}{5}\times u_0^2 = \frac{16}{5} \text{ et } u_2 = \frac{1}{5}\times u_1^2 = \frac{256}{125} = 2{,}048$$

b)

```
def suite_u(p) :
    u = 4
    for i in range( 1 , p+1 ) :
        u = 1/5*u^2
    return u
```

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 4$

Initialisation : $u_0 = 4$ donc $0 < u_0 \leq 4$

La relation est vérifié au rang 0

SQ il existe n tel que $0 < u_n \leq 4$ et DQ $0 < u_{n+1} \leq 4$

$0 < u_n \leq 4$

$0 < u_n^2 \leq 16$ on conserve l'ordre car la fonction caré est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$0 < \frac{1}{5}u_n^2 \leq \frac{16}{5}$

Or $16/5 = 3{,}2 \leq 4$ donc $0 < u_{n+1} \leq 4$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc par hérédité , elle est vraie pour tout entier n

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n\left(\frac{1}{5}u_n - 1\right)$. D'après la question précédente, u_n est positif donc le signe dépend de $\frac{1}{5}u_n - 1$ or $0 < u_n \leq 4$

$0 < \frac{1}{5}u_n \leq \frac{4}{5}$

$-1 < \frac{1}{5}u_n - 1 \leq -\frac{1}{5} < 0$

d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$ cad $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

D'aprés les théorémes de convergence monotone, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente

3) a) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$

$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2 \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ d'où $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$

b) En déduire la valeur de ℓ

On résout l'équation $\ell = \frac{1}{5}\ell^2 \quad \ell - \frac{1}{5}\ell^2 = 0 \quad \ell(1-\frac{1}{5}\ell) = 0$ EPN $\ell = 0$ ou $\ell = 5$

Or on sait que $0 < u_n \leq 4$ donc $\ell = 0$

4) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$

a) Justifier que la suite (v_n) est bien définie

On sait que $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ existe et (v_n) est bien définie

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n^2) = -\ln(5) + 2\ln(u_n) = 2v_n - \ln(5)$

c) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2

$w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) \quad -\ln(5) = 2(v_n - \ln(5)) = 2w_n$

la suite (w_n) est géométrique de raison 2 de premier terme $w_0 = v_0 - \ln(5) = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

d) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et

montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$

$w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$ d'où $v_n - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$ et $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$

5) Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$

comme $2 > 1$, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ d'où comme $\ln\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0{,}22$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ or $\lim_{N\to-\infty} e^N = 0$ donc

par composition des limites , $\lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$ c'est à $\lim_{dire\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 2 7 points

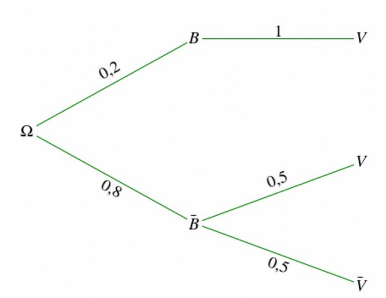
Partie I

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h , il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.
On notera :

- B l'événement « Julien réussit à prendre son bus »
- V l'événement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol »

1) Donner la valeur de $P_B(V)$ = 1 il est à l'heure à l'aéroport s'il prend le bus

2) Représenter la situation par un arbre pondéré



3) Montrer que P(V) = 0,6

Proba totale :

$P(V) = P(B\cap V)+P(\overline{B}\cap V) = ... = 0,6$

4) Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier .

On cherche $P_V(B) = \dfrac{P(V\cap B)}{P(V)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$

Partie II

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On apelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquament .

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement .

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Facile X = B(206,0,95)

2) En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

E(X) = 206*0,95 = 195,7 donc 195,7 passagers en moyenne

3) Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.

Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

$P(X=201) = \binom{206}{201} 0,95^{201}\times 0,05^{5} \approx 0,0306$ donc 0,031

4) Calculer $P(X\leq 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

La calculatrice donne $P(X\leq 200) \approx 0,9477$ donc 0,948

5) La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros .

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement , la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

- Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet .
- C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol .

On admet que Y suit la loi de probabilité donné par le tableau ci-dessous :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
P(Y= y_i)	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant P(Y=6)

$$P(Y=6) = 1 - \sum_{i=0}^{5} P(Y=i) = 0{,}00003$$

b) Justifier que C = $51500-850\,Y$

Le billet coûte 250€ plus la pénalité cela donne 850 € prix à payer pour 1 remboursement

Si 206 personnes ont pris un billet alors $206\times250 = 51500$

on a donc C = $51500-850\,Y$

c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près

y_i	0	1	2	3	4	5	6
c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
P(C= c_i)	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

E(C) = $\sum p_i\times c_i = 51429{,}246$

d) Comparer le chiffre d'affaire obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

On constate que l'entreprise a intérêt à pratiquer le surbooking car c'est rentable

<u>Exercice 3</u> 7 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur]0;+∞[par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$$

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur]0;+∞[par g(x) = $2(x-1) - x\ln(x)$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

1) Calculer g(1) et g(e)

g(1) = $2\times 0 - \ln(1) = 0$ et g(e) = $2(e-1) - e\ln(e) = 2e - 2 - e = e - 2$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ en justifiant votre démarche

on sait de part les croissances comparées que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

d'où comme $\lim\limits_{x \to 0} 2(x-1) = -2$, on a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2$

3) Montrer que pour tout x > 0 , $g'(x) = 1 - \ln(x)$

En déduire le tableau de variation de g sur]0;+∞[

g est une somme et un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

g'(x) = $2\times 1 - \left(1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x}\right) = 2 - \ln(x) - 1 = 1 - \ln(x)$

$1 - \ln(x) > 0$ ssi $\ln(x) < 1$ ssi $x < e$ d'où g décroissante sur [e;+∞[et croissante sur]0;e]

x	0		e		+∞
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	–2	↗	e–2	↘	–∞

4) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet exactement deux solutions distinctes sur]0;+∞[:

1 et α avec $\alpha \in$ [e;+∞[On donnera un encadrement de α à 0,01 près

Sur]0;e[, g est strictement croissante et continue et on a $g(]0;e[) =]-2;e-2[$ avec $e-2 \approx 0{,}7$

Comme 0 ∈ $]-2;e-2[$, d'après le corollaire du TVI, l'équation g(x) = 0 admet une unique solution sur]0;e[

De même on montre que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution sur]e;+∞[

On a g(1) = $2(1-1) - 1\times\ln 1 = 0$ et la calculatrice donne 4,92 < α < 4,93

5) En déduire le tableau de signe de g sur]0;+∞[

x	0		1		α		+∞
g(x)	‖	–	0	+	0	–	

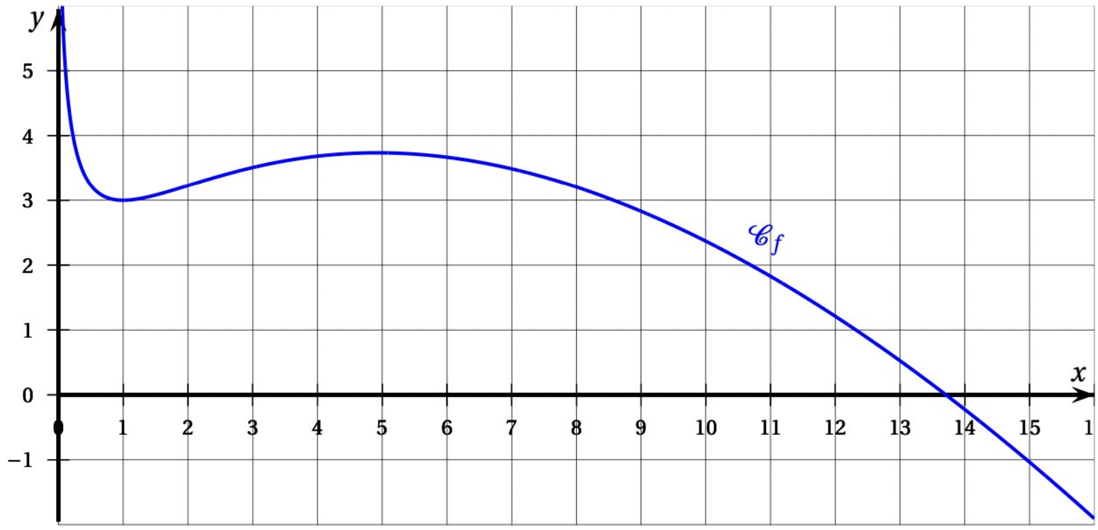
Partie B Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par : f(x) = $3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$

On note f' sa fonction dérivée

La représentation graphique de f , notée C_f , est donnée dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-dessous .

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ = +∞



1) Déterminer la limite de f en +∞ en justifiant votre démarche

f(x) = $3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$ = $x\left(3 - \ln(x) - \dfrac{2\ln(x)}{x}\right)$

on sait de part les croissances comparées que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ = 0 et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$ = + ∞

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \ln(x) - 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ = -∞ et par produit comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ = +∞, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = -∞

2) a) Justifier que pour tout x > 0 , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

$$f'(x) = 3 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - 2 \times \frac{1}{x} = 3 - \ln(x) - 1 - \frac{2}{x} = \frac{2x - x\ln(x) - 2}{x} =$$

$$\frac{2(x-1) - x\ln(x)}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

b) En déduire le tableau de variations de f sur]0;+∞[

le signe de f' est celui de g car x > 0 donc :

x	0		1		α		+∞
$f'(x)$	‖	-	0	+		+	
$f(x)$	‖ +∞	↘	3	↗	$f(\alpha)$	↘	−∞

$f(\alpha) = 3\alpha - \alpha\ln(\alpha) - 2\ln(\alpha)$

3) On admet que pour tout réel $x > 0$, la dérivée seconde de f notée f'' est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$

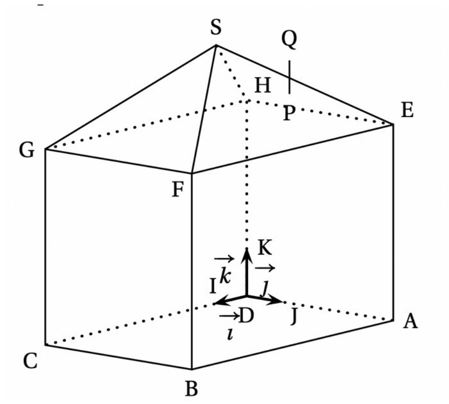
Etudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f

Etudions le signe de f'' :

x	0 2 +∞
f''(x)	‖ + 0 -

La dérivée seconde s'annule en 2 en changeant de singe donc :
f est convexe sur]0;2[, concave sur]2;+∞[et admet un point d'inflexion de coordonnées $(2;6-4\ln(2))$

Exercice 4 **2 points** Un peu d'espace pour finir **FACULTATIF**



Une maison est modélisée par un parallèlipède rectangle ABCDEFGH surmonée d'une pyramide EFGHS. Dans le repère proposée par la figure, on donne les coordonnées des points P et Q :

$P\ (2;3;5)$ $Q\ (2;3;5{,}5)$

Le segment [PQ] représente, sur le toit, une antenne .
Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-4+6s \\ y=7-4s \\ z=2+4s \end{cases}$

Question L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

Equation de la droite (PQ) $\overrightarrow{PQ}\ (0;0;0{,}5)$ donc $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5+0{,}5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Cherchons l'intersection de (PQ) et de Δ: $\begin{cases} -4+6s=2 \\ 7-4s=3 \\ 2+4s=5+0{,}5t \end{cases}$ $\begin{cases} s=1 \\ s=1 \\ t=2 \end{cases}$

Les deux droites se coupent donc en $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5+0{,}5\times 2=6 \end{cases}$ c'est àdire juste au dessus du point Q car 6 > 5,5 donc l'oiseau ne percute pas l'antenne