Mini bac 2 Terminales Spécialité mathématiques

Le candidat traitera les exercices 1 , 2 et 3 .
L'exercice 4 est faculatitf, à ne faire que si le reste est traité

Le Lundi 22 janvier 2024
4 heures
Calculatrice en mode examen

Exercice 1   7 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$

1) a) Calculer u_1 et u_2

b) Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage python . Cette fonction est nommé *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n)

```
def suite_u(p)  :
        u=.....
        for i in range(1 , ...)  :
                u = ...
        return u
```

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 4$

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

3) a) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$

b) En déduire la valeur de ℓ

4) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$

a) Justifier que la suite (v_n) est bien définie

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$

c) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2

d) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et

montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right)\times 2^n + \ln(5)$

5) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

<u>Exercice 2</u> **7 points**

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h , il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.
On notera :

- B l'événement « Julien réussit à prendre son bus »
- V l'événement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol »

1) Donner la valeur de $P_B(V)$
2) Représenter la situation par un arbre pondéré
3) Montrer que $P(V) = 0,6$
4) Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier .

Partie II

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On apelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquament .
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement .

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3) Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4) Calculer $P(X \leq 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

5) La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros .

Si plus de 200 passagers se présentnet à l'embarquement , la compagnies doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

- Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet .
- C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol .

On admet que Y suit la loi de probabilité donné par le tableau ci-dessous :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
P(Y= y_i)	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant P(Y=6)

b) Justifier que C = $51500-850\,Y$

c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau. Calculer l'espérance de la varaible aléatoire C à l'euro près

d) Comparer le chiffre d'affaire obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Exercice 3 7 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur]0;+∞[par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$$

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur]0;+∞[par g(x) = $2(x-1)-x\ln(x)$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

1) Calculer g(1) et g(e)

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ en justifiant votre démarche

3) Montrer que pour tout x > 0 , $g'(x) = 1-\ln(x)$

En déduire le tableau de variation de g sur]0;+∞[

4) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet exactement deux solutions distinctes sur]0;+∞[:

1 et α avec $\alpha \in$ [e;+∞[On donnera un encadrement de α à 0,01 près

5) En déduire le tableau de signe de g sur]0;+∞[

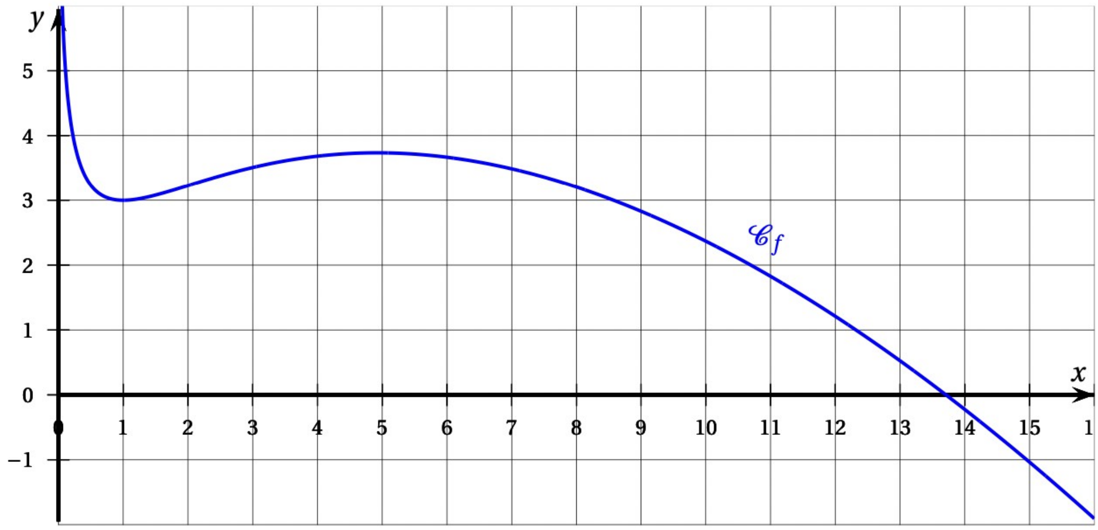
Partie B Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par : f(x) = $3x-x\ln(x)-2\ln(x)$

On note f' sa fonction dérivée

La représentation graphique de f , notée C_f , est donnée dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-dessous .

On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$



1) Déterminer la limite de f en +∞ en justifiant votre démarche

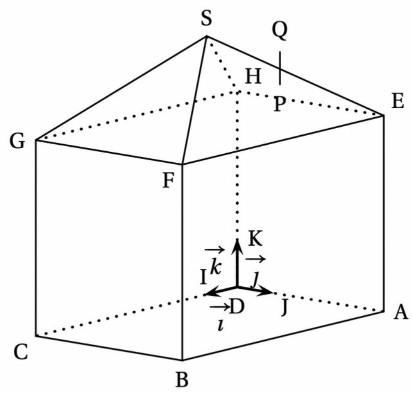
2) a) Justifier que pour tout x > 0 , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

b) En déduire le tableau de variations de f sur]0;+∞[

3) On admet que pour tout réel x > 0 , la dérivée seconde de f notée f'' est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$

Etudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f

<u>Exercice 4</u> 2 points Un peu d'espace pour finir **FACULTATIF**



Une maison est modélisée par un parallèlipède rectangle ABCDEFGH surmonée d'une pyramide EFGHS. Dans le repère proposée par la figure, on donne les coordonnées des points P et Q :

P $(2;3;5)$ Q $(2;3;5,5)$

Le segment [PQ] représente, sur le toit, une antenne .
Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-4+6s \\ y=7-4s \\ z=2+4s \end{cases}$

<u>Question</u> L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?