Bac Blanc 1 Terminale A   Spécialité mathématique

Durée 4 heures

Exercice 1 5 points C C B B A

Question 1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{2n+1}$

La suite (u_n) est :

a) arithmétique de raison 2

b) géométrique de raison e

c) géométrique de raison e^2

d) convergente vers e

$u_0 = e$ $u_1 = e^3$ $u_2 = e^5$ donc suite géométrique de raison e^2 Réponse C

Question 2 On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = xe^x$.

La fonction F qui vérifie $F' = f$ est :

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$

b) $F(x) = (x+1)e^x$

c) $F(x) = (x-1)e^x$

d) $F(x) = x^2 e^{x^2}$

On dérive les fonctions et on trouve Réponse C $F'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = xe^x$

Question 3 On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$

Cette suite :

a) diverge vers $+\infty$

b) converge vers 0

c) converge vers $\frac{2}{5}$

d) converge vers $\frac{1}{3}$

$$u_n = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{5^n}+1}$$ on trouve alors une limite de 0 Réponse B

Question 4 On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs

telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0.

On peut affirmer que :

a) la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge

b) la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge

c) la suite (u_n) est croissante

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

Réponse B $\frac{v_n}{u_n} = v_n \times \frac{1}{u_n}$ de limite 0

Question 5 La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = e^x - x$ est :

a) convexe sur ℝ

b) concave sur ℝ

c) Sa courbe admet un point d'inflexion

d) sa courbe admet trois points d'inflexion

$f''(x) = e^x > 0$ donc la fonction est convexe sur ℝ **Réponse A** .

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{6u_n+2}{u_n+5}$

1) Calculer u_1

$u_1 = \frac{6u_0+2}{u_0+5} = ... = \frac{50}{13}$

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;+∞[par f(x) = $\frac{6x+2}{x+5}$.

Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0;+∞[

En déduire que pour tout réel x > 2 , on a f(x) > 2

f est un fonction rationnelle donc dérivable sur sont ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{6(x+5)-1\times(6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$$ > 0 donc f croissante

f étant croissante sur]2;+...[, on a donc $f(x)>f(2)$ cad f(x) > 2 car f(2) = 2

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n>2$

initialisation : $u_0 = 8 > 2$ relation au rang 0

SQ il existe n tq $u_n > 2$ et DQ $u_{n+1} > 2$

On sait que $u_n>2$ et comme f conserve l'ordre sur [0;+∞[on a donc $f(u_n)>f(2)$

$$u_{n+1}>\frac{14}{7}=2$$

on termine

3) On admet que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}-u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

$u_n > 2$ donc $2-u_n$ négatif et u_n+1 et u_n+5 sont positifs d'où $u_{n+1}-u_n<0$ cad $u_{n+1}<u_n$ d'où la suite est décroissante

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

la suite est décroissante et minorée par 2 donc elle converge d'après les th de convergence monotones

4) On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$

a) Calculer $v_0 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5}+1} = \ldots = \frac{4u_n-8}{7u_n+7} = \frac{4}{7}\times\frac{u_n-2}{u_n+1} = \frac{4}{7}v_n$$ d'où la réponse

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n)

$v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{7}\right)^n$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ car $-1<\frac{4}{7}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$ donc $v_n(u_n+1)=u_n-2$

$$v_n u_n + v_n = u_n - 2$$

$$u_n(v_n-1) = -2-v_n$$

$$u_n = \frac{-2-v_n}{v_n-1}$$

comme (v_n) converge vers 0, on en déduit que u_n converge vers $-\frac{2}{-1} = 2$

5) On considère la fonction Python **seuil** ci-contre, où A est un nombre réel strictement positif plus grand que 2 .

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil(2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u+2)/(u+5)
        n = n+1
    return n
```

$u_{13} \approx 2{,}0013$ et $u_{14} \approx 2{,}0007$ donc la réponse est 14

les termes de la suite seront donc inférieurs à 2,001 à partir du rang 14

Exercice 3 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes. Les probabilités seront données à 10^{-3} *près*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif soit négatif.

Dans un population, ce test donne les résultats suivants :

- si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas
- si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas .

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

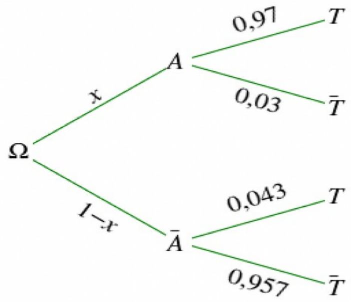
On choisit au hasard un individu dans la population et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique »
- T l'évènement « l'individu présente un test positif »

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : p(A) = x

Partie A

1) Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation



2) a) Démontrer l'égalité $p(\mathrm{T}) = 0{,}927x+0{,}043$

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des proba totales , on a :

P(T) = $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{T})$

P(T) = $x\times0{,}97+(1-x)\times0{,}043$

P(T) = $0{,}927x+0{,}043$

b) En déduire la probabilité que l'individu soit allergique

P(T) = $0{,}927x+0{,}043 = 0{,}20$

$$x = \frac{0{,}20-0{,}043}{0{,}927} \approx 0{,}169$$

3) Justifier par un calcul l'affirmation suivante:

« si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique »

Calculons $\mathrm{P_T}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{T})}{\mathrm{P}(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}169\times0{,}97}{0{,}2} \approx 0{,}820 > 80$ % donc affirmation correcte

Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

Le choix d'une personne est une épreuve de Bernoulli de succès « la personne est allergique » de probabilité 0,08. Comme ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise parmi 150 personnes , X suit une loi binomiale de paramètre 0,08 et 150

2) Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques

On veut $P(X=20) = \binom{150}{20} \; 0{,}08^{20} \times (1-0{,}08)^{130}$ env 0,008

3) Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

On cherche $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14)$. La calculatrice donne :

$= 1-0{,}7797$

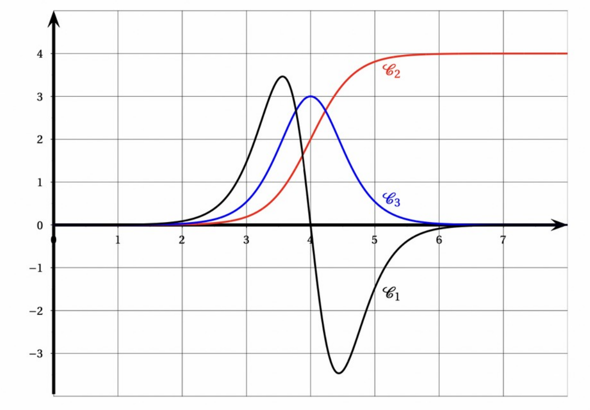
$= 0{,}220$

Exercice 4 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivables sur ℝ ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''



1) Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.

Soit f de courbe C_2 . f est strictement croissante et on constate que C_3 est au dessus de l'axe des abscisses , on aurai donc f' strictement positive ce qui correspond avec f .

La fonction représentée par la courbe C_1 est négative sur [4;+∞[et positive sur]-∞;4[. ce qui correspond aux variations de la fonction f' croissante sur [4;+∞[et décroissante sur]-∞;4] d'où C_1 est f''

$C_1 = C_{f''}$ $C_2 = C_f$ $C_3 = C_f'$

2) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4

on peut lire un coef directeur de 3

3) Donner avec la précision permise par le graphique l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$

on peut donner x = 3 , x = 4 et x = 5

Partie B

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur ℝ par g(x) = $\dfrac{4}{1+e^{-kx}}$

1) Prouver que $g'(0)=k$

$$g'(x) = -4\times\frac{-k\,e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2} = \frac{4k\,e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$$

$$g'(0) = \frac{4k}{(1+1)^2} = k$$

2) Préciser le sens de variation de la fonction g

k étant positif et une exponentielle étant strictement positive, g'(x) est positive d'où g croissante

3) En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0

▸ Calcul formel
1) g(x) = 4/(1+e^{-kx}) $\rightarrow\ g(x) = \dfrac{4}{e^{-kx}+1}$
2) Simplifier $g''(x)$ $\rightarrow\ g''(x) = -4e^{-kx}(e^{-kx}-1)\dfrac{k^2}{(e^{-kx}+1)^2}$

Pour prouver qu'en 0 on a un point d'inflexion, on calcule g''(0) = $-4\times1(1-1)\times\dfrac{k^2}{(1+1)^2}$ = 0.

Vérifions maintenant que g'' change de signe .

Le signe de g'' est celui de $-(e^{-kx}-1)=1-e^{-kx}$

$$1-e^{-kx}>0$$

$$e^{-kx}<1 = e^0$$

$$-kx<0$$

$$x>0$$

Ainsi , g'' change de signe en 0 d'où la réponse