Bac Blanc 1 Terminale A
Spécialité mathématique

Durée 4 heures

Exercice 1   5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Question 1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{2n+1}$

La suite (u_n) est :

a) arithmétique de raison 2 — b) géométrique de raison e

c) géométrique de raison e^2 — d) convergente vers e

Question 2 On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $x\mathrm{e}^x$.

La fonction F qui vérifie $F'=f$ est :

a) F(x) = $\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ — b) F(x) = $(x+1)\mathrm{e}^x$

c) F(x) = $(x-1)\mathrm{e}^x$ — d) F(x) = $x^2\mathrm{e}^{x^2}$

Question 3 On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$

Cette suite :

a) diverge vers $+\infty$ — b) converge vers 0

c) converge vers $\frac{2}{5}$ — d) converge vers $\frac{1}{3}$

Question 4 On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0.

On peut affirmer que :

a) la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge — b) la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge

c) la suite (u_n) est croissante — d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

Question 5 La fonction f définie sur ℝ par f(x) = $\mathrm{e}^x - x$ est :

a) convexe sur ℝ — b) concave sur ℝ

c) Sa courbe admet un point d'inflexion — d) sa courbe admet trois points d'inflexion

Exercice 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}$

1) Calculer u_1

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x+2}{x+5}$.

Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n>2$

3) On admet que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

4) On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

a) Calculer v_0

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n)

5) On considère la fonction Python **seuil** ci-contre, où A est un nombre réel strictement positif plus grand que 2 .

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil(2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u+2)/(u+5)
        n = n+1
    return n
```

<u>Exercice 3</u> 5 points

Les parties A et B sont indépendantes. Les probabilités seront données à 10^{-3} *près*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif soit négatif.

Dans un population, ce test donne les résultats suivants :

- si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas
- si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas .

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique »
- T l'évènement « l'individu présente un test positif »

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : p(A) = x

Partie A

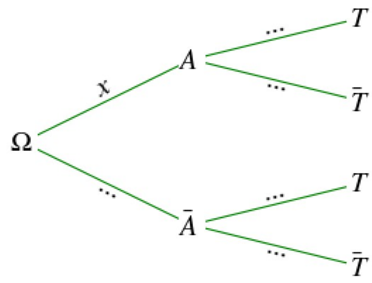
1) Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation

2) a) Démontrer l'égalité $p(T) = 0{,}927x + 0{,}043$

b) En déduire la probabilité que l'individu soit allergique

3) Justifier par un calcul l'affirmation suivante:

« si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique »



Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

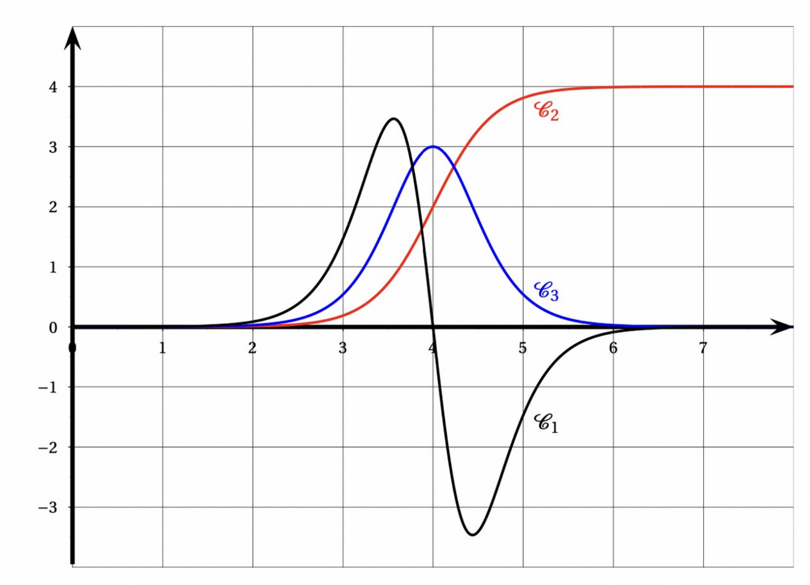
1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2) Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques
3) Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

<u>Exercice 4</u> 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur ℝ ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''



1) Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4
3) Donner avec la précision permise par le graphique l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$

Partie B

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = \dfrac{4}{1+e^{-kx}}$

1) Prouver que $g'(0)=k$

2) Préciser le sens de variation de la fonction g

3) En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0

▸ Calcul formel
1) g(x) = 4/(1+e^{-kx})   → $g(x) = \dfrac{4}{e^{-kx}+1}$
2) Simplifier $g''(x)$ → $g''(x) = -4e^{kx}(e^{kx}-1)\dfrac{k^2}{(e^{kx}+1)^2}$