DS Ln

Exercice 1 7 points **Thèmes : fonctions, primitives, probabilités**

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

On a alors $f'(x) = 1\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$ soit la réponse a.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.

On peut écrire $g(x) = x^2[1 - \ln(x)] = x^2 - x^2\ln(x)$.

On a :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ d'après une propriété du cours sur les croissances comparées.

On aura donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ soit la réponse c.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$.

$f(x) = x\left(x^2 - 0,9x - 0,1\right)$, donc

$$f(x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2 - 0,9x - 0,1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, $\Delta = 0,81 + 0,4 = 1,21 = 1,1^2$.

Cette équation a donc deux solutions distinctes $x_2 = \dfrac{0,9 + 1,1}{2} = 1$ et $x_3 = \dfrac{0,9 - 1,1}{2} = -0,1$.

Conclusion l'équation a trois solutions : $-0,1$; 0 ; 1. Réponse d.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour montrer qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée, il suffit de la dériver.

Soit $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$.

K est dérivable comme composée de fonction dérivable et $K'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2H'(2x) = k(x)$.

car $H'(x) = h(x)$ car H est une primitive de h.

D'où la réponse c.

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est :

$f$est une fonction dérivable comme produit de fonction dérivable.

La tangente en $x = 1$ aura alors comme équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = \mathrm{e}$ et comme $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$, $f'(1) = 2\mathrm{e}$.

L'équation de la tangente est donc $y = 2\mathrm{e}(x-1) + e$ ou $y = 2\mathrm{e}x - 2\mathrm{e} + \mathrm{e}$ ou $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$ soit la réponse b.

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

Il faut résoudre l'inéquation :

$(0,2)^n < 0,001 \iff n\ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Le plus petit entier vérifiant $n > 4,29$ est 5 d'où la réponse d.

Exercice 3 – Fonctions, fonction logarithme **7 points**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)]$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. $g(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln(\mathrm{e})) = 1 + \mathrm{e}^2(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2$
   $\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e}^2 > 4$ donc $1 - \mathrm{e}^2 < 0$, et donc $g(\mathrm{e}) < 0$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(1 - 2\ln(x)) = -\infty$.
   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
3. **a.** Pour $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :
   $g'(x) = 2x(1 - 2\ln(x)) + x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

   b. Pour étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on détermine le signe de $g'(x)$ sur cet intervalle.

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x) = -4x\ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	

   Donc la fonction g
   - est strictement croissante sur $]0\,;1[$;
   - est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$;
   - admet en $x = 1$ un maximum égal à $g(1) = 1 + 1^2(1 - \ln(1)) = 2$.

   c. On trace le tableau des variations de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

   D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On appelle α cette solution.

   d. $\left.\begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) \approx -0,55 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1\,;2]$

   $\left.\begin{array}{l} g(1,8) \approx 0,43 > 0 \\ g(1.9) \approx -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,8\,;1,9]$

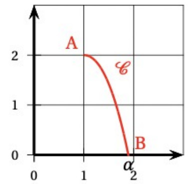
   $\left.\begin{array}{l} g(1,89) \approx 0,024 > 0 \\ g(1.90) \approx -0,024 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [1,89\,;1,90]$

4. On en déduit le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
   Sur $[1\,;\,\alpha]$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $\ln(x) + 1 > 0$ donc $-4(\ln(x) + 1) < 0$.
   On en déduit que $g''(x) > 0$ et donc que la fonction g est concave sur $[1\,;\,\alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.



   a. La droite (AB) a pour équation réduite :
   $\dfrac{y - y_\mathrm{A}}{x - x_\mathrm{A}} = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \iff \dfrac{y-2}{x-1} = \dfrac{0-2}{\alpha - 1} \iff y = \dfrac{-2(x-1)}{\alpha-1} + 2$
   $\iff y = \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2}{\alpha-1} + \dfrac{2\alpha-2}{\alpha-1} \iff y = \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

   b. Sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, la fonction est concave, donc sa courbe représentative est située au dessus de toute sécante, donc au dessus du segment [AB].
   On en déduit que sur $[1\,;\,\alpha]$, on a : $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.