DS Math Terminale A

EXERCICE 1 7 points **Thèmes : fonctions, primitives, probabilités**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\dfrac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

a. 0	**b.** 1	**c.** 2	**d.** 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$	**b.** $K(x) = 2H(2x)$	**c.** $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$	**d.** $K(x) = 2H(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est :

a. $y = \mathrm{e}x + \mathrm{e}$	**b.** $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$	**c.** $y = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$	**d.** $y = \mathrm{e}x$

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a. $n \leqslant 4$	**b.** $n \leqslant 5$	**c.** $n \geqslant 4$	**d.** $n \geqslant 5$

EXERCICE 3 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME **7 points**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
   a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.

   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha - 1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.