DS Géométrie dans l'espace Terminale

Mercredi 30 novembre 2022

Exercice 1 La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+2t \\ z=-1-t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer un vecteur directeur de Δ $\vec{u}$ $(-3;2;-1)$

2) Justifier qu'il existe un point A de Δ d'abscisse 4

A a pour abscisse 4 donc $1-3t = 4$ soit t = -1 d'où y = -2+2t = -4 et z = $-1-t = 0$

A (4 ; -4 ; 0)

3) La droite Δ passe-t-elle par le point B de coordonnées $\left(-10;\frac{16}{3};-\frac{14}{3}\right)$?

$1-3t = -10$ donc t = $\frac{11}{3}$ d'où y = $-2+2\times\frac{11}{3}$ =

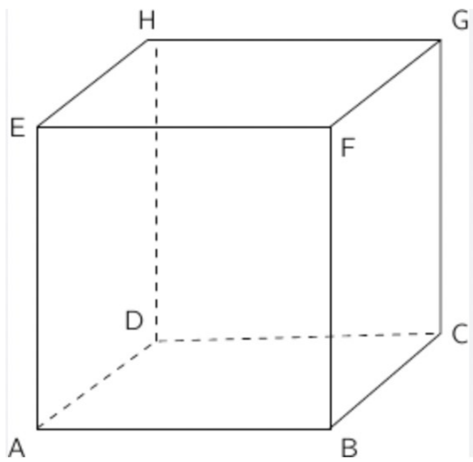
$-2+\frac{22}{3}=\frac{16}{3}$ et z= $-1-t$ = $-1-\frac{11}{3}$ = $-\frac{14}{3}$

Exercice 2

On considère un cube ABCDEFGH donné ci-contre.

On note M le milieu du segment [EH] , N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$

L'espace est rapporté au repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)



1) Donner les coordonnées des points M, N et P

M $\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ N $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ P$\left(\frac{1}{4};1;1\right)$

2) a) Ecrire un système d'équations paramétriques des droites (MP) et (FG)

$\overrightarrow{MP}$ $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{FG}$ $(0;1;0)$ d'où (MP) $\begin{cases} x=0+\frac{1}{4}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=1 \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et (FG) $\begin{cases} x=1 \\ y=0+k \\ z=1 \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{R}$

b) Les droites (MP) et (FG) sont-elles sécantes? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$\begin{cases} \frac{1}{4}t=1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=k \\ 1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} t=4 \\ k=\frac{5}{2} \end{cases}$ intersection en R$\left(1;\frac{5}{2};1\right)$

3) On donne le point T de coordonnées $\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$

a) Placer le point T sur la figure

b) Le triangle TPN est-il rectangle ?

$\overrightarrow{TP}$ $\left(\frac{1}{4}-1;1-1;1-\frac{5}{8}\right)$ $\overrightarrow{PN}$ $\left(1-\frac{1}{4};\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}-1\right)$ $\overrightarrow{TN}$ $\left(1-1;\frac{1}{2}-1;\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\right)$

$\overrightarrow{TP}$ $\left(-\frac{3}{4};0;\frac{3}{8}\right)$ $\overrightarrow{PN}$ $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{TN}$ $\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{8}\right)$

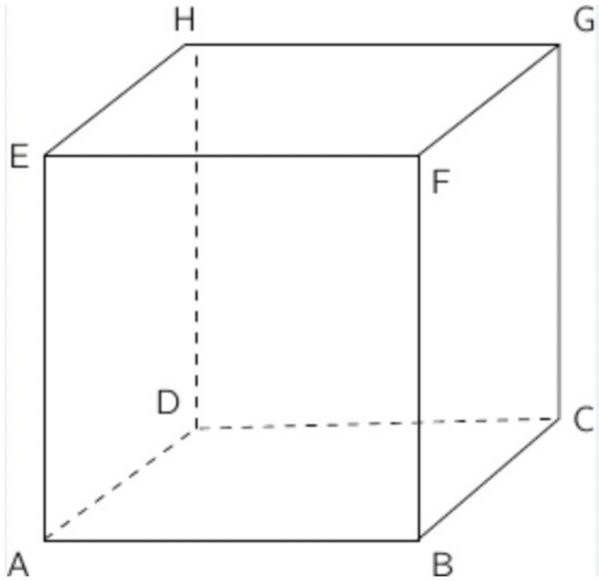
$TP^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{16}+\frac{9}{64} = \frac{45}{64}$

$PN^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{17}{16} = \frac{68}{64}$

$TN^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{64} = \frac{17}{64}$

Comme $PN^2 \neq TP^2+TN^2$, d'après le théorème de Pythagore le triangle TNP n'est pas rectangle

<u>Exercice 3</u> On donne un cube ABCDEFGH, I le milieu de [CG], J celui de [EH] et K est défini par : $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$



1) Construire, sans justifier, sur la figure proposée, la section du cube par le plan (IJK)

2) Quelle conjecture peut-on faire en observant cette section ?

Cette section semble passer par A

3) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

b) En déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\,\overrightarrow{AI}+y\,\overrightarrow{AJ}$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}$

c) Démontrer alors la conjecture faite en 2)

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont donc coplanaires avec un point commun donc les points sont coplanaires c'est à dire A I J K forment un plan et ainsi on a bien $A \in (IJK)$