Interrogation Terminale A

Mercredi 14 décembre 2022

Exercice 1 :

Il s'agit d'un QCM. Entourer sur le sujet la bonne réponse :

1) La courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a) x = -2 b) y = -1 c) y = -2 d) x = -1

2) L'équation $e^{2x}+e^{x}-12=0$ admet dans ℝ :

a) Trois solutions b) Deux solutions c) Une seule solution d) aucune solution

3) On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $\dfrac{3}{5+e^{x}}$. Sa courbe représentative admet :

a) Une seule asymptote horizontale
b) Une asymptote horizontale et une asymptote verticale
c) deux asymptotes horizontales

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par f(x) = $(x+2)e^{-x}$.

a) Montrer que pour tout réel x, f(x) = $\dfrac{x}{e^{x}}+2e^{-x}$

f(x) = $(x+2)e^{-x} = xe^{-x}+2e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}+2e^{-x}$

b) En déduire la limite de f en +∞.

$\dfrac{x}{e^{x}} = \dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}}$ or d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ d'où comme

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation y = 0

Exercice 3 :

On considère la fonction g définie sur ℝ par g(x) = $-e^{x}-xe^{x}+2$

PARTIE A

1) Calculer les limites de g en +∞ et en -∞

En +∞ , pas de problème on trouve -∞

En -∞

D'après les croissances comparées , $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ d'où comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ il vient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

2) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation

f est dérivable sur ℝ comme somme et produit de fonctions dérivables

$f'(x) = -e^{x}-(1\times e^{x}+xe^{x}) = e^{x}(-2-x)$

pour tout x , e^{x} est positif donc le signe de f' est celui de $-x-2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	e^2+2	$\searrow$	$-\infty$

3) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution . On notera α cette solution

A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Sur]-∞;-2], on a g continue et $g(]-\infty;-2])=]2;e^2+2]$ donc g est strictement positive

Sur]-2;+∞[, g est continue et strict décroissante. On a g(]-2;+∞[) = $]-\infty;e^2+2[$

Comme 0 ∈ $]-\infty;e^2+2[$, d'après le th de la bijection, il existe un unique α ∈]–2;+∞[tel que g(x) = 0

La calculatrice donne $0{,}37 < \alpha < 0{,}38$

4) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x .

D'après le tableau de variation, g positive sur $]-\infty;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;+\infty[$

PARTIE B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\dfrac{x+2}{e^x-x}$

1) Calculer les limites de f en -∞ et +∞

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$ et d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}-1 = +\infty$ donc par quotient , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}-1 = -1$ donc par quotient , $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$

2) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)$ a le même signe que g(x) où g est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le tableau de variation de la fonction f

$$f'(x) = \frac{1(e^x-x)-(x+2)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^x-x-xe^x+x-2e^x+2}{(e^x-x)^2} = \frac{-e^x-xe^x+2}{(e^x-x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

d'où la réponse et d'après la question A4)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0