DS terminale : compléments dérivation convexité

Le mercredi 28 septembre

Exercice 1 (4,5 points) : Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) f(x) = $(3x+5)^5 = u^5$

f est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 5u'u^4 = 5\times3(3x+5)^4 = 15(3x+5)^4$

b) g(x) = $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{u}$

Etudions le signe de x^2+x+1 $\Delta = -3<0$ donc du signe de a = 1 > 0 donc x^2+x+1 est strictement positif d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

c) h(x) = $e^{2-x^2} = e^u$

u(x) = $2-x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc h aussi

$h'(x) = u'e^u = -2xe^{2-x^2}$

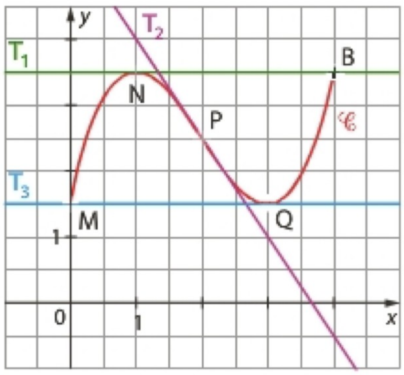
d) k(x) = $e^{\frac{x}{x+2}}$

u(x) = $\dfrac{x}{x+2}$ est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ donc k aussi

$u'(x) = ... = \dfrac{2}{(x+2)^2}$ d'où $k'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}\ e^{\frac{x}{x+2}}$

Exercice 2 (7 points) :

f est une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0;4]$ dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ ci-contre.
Les tangentes T_1 et T_3 sont parallèles à l'axe des abscisses respectivement aux points N et Q.
T_2 est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ et le point P est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



1. Déterminer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$ graphiquement en justifiant la réponse donnée.
2. Déterminer une équation de la tangente T_2
3. Déterminer $f''(2)$ (justifier la réponse)
4. Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   et déterminer la convexité de f
5. En déduire les variations de f' et le signe de $f''(x)$

1) T_1 est la tangente en 1 à C_f . Comme elle est horizontale , $f'(1)$ = 0 (coef dir nul)

On lit le coef directeur de la tangente T_2 : $f'(2) = -1{,}5$

T_3 est la tangente en 3 à C_f . Comme elle est horizontale , $f'(3)$ = 0 (coef dir nul)

2) y = $f'(2)(x-2)+f(2)$ y = $-1{,}5(x-2)+2{,}5$ y = $-1{,}5x+5{,}5$

3) La courbe C_f admet un point d'inflexion en x = 2 car la tangente T_2 traverse la courbe

donc $f''(2) = 0$

4) Une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes sur I

f est convexe sur [2;4] et concave sur [0;2]

5) f convexe ssi f' croissante ssi f'' positive

f concave ssi f' décroissante ssi f'' négative

<u>**Exercice 3(4 points) :**</u>

Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $(-5x^2+10)e^x$

Etudier la convexité de la fonction f . On précisera les éventuels points d'inflexion de C_f

Déterminer f''

f étant un produit de deux fonctions deux fois dérivable sur ℝ f est deux fois dérivables

$f'(x) = -10xe^x+(-5x^2+10)e^x = (-5x^2-10x+10)e^x$

$f''(x) = (-10x-10)e^x+(-5x^2-10x+10)e^x = (-5x^2-20x)e^x$

Etudions le signe de f''

pour tout réel x , e^x est strictement positif donc le signe de f'' est celui de $-5x^2-20x$

$-5x^2-20x = -5x(x+4)$ donc deux racines 0 et -4 d'où

pour tout x ∈]-∞;-4[ou]0;+∞[, $f''(x)$ est du signe de -5 donc négatif et f est concave

pour tout x ∈]-4;0[, $f''(x)$ est du signe de - -5 donc positif et f est convexe

f'' s'annule en 0 et -4 en changeant de signe dans chaque cas donc C_f admet deux points d'inflexion de coordonnées (0;10) et (-4 ; $-70e^{-4}$)

<u>**Exercice 4 (4,5 points) :**</u>

Soit f(x) = $x+1+xe^{-x}$

1) Démontrer que $f'(x) = 1+(1-x)e^{-x}$ puis que $f''(x) = (-2+x)e^{-x}$

Facile

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0

y = $f'(0)(x-0)+f(0)$

y = 2x+1

3) Déduire des questions précédentes, sans calcul, que pour tout x ≤ 2 , f(x) ≤ 2x+1

pour tout x ≤ 2 , $-2+x$ est négatif donc f'' est négative d'où f est concave et donc C_f en dessous de ses tangentes pour x ≤ 2 en particulier, C_f est en dessous de sa tangente en 0

ce qui signifie que pour tout x ≤ 2 , f(x) ≤ 2x+1