Interrogation Terminale A : suite et récurrence

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 0{,}04$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n < 0{,}05$

initialisation : n = 1 $\quad u_1 = 0 < 0{,}05$ donc la relation est vraie au rang 1

SQ il existe n tel que $u_n < 0{,}05$ $\quad$ DQ $u_{n+1} < 0{,}05$

On sait que $u_n < 0{,}05$

$$0{,}2\,u_n < 0{,}01$$

$$0{,}2\,u_n + 0{,}04 < 0{,}05$$

$$u_{n+1} < 0{,}05$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 1 donc elle est vraie pour tout n ≥ 1

2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - 0{,}05$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 0{,}05 \\ &= 0{,}2\,u_n + 0{,}04 - 0{,}05 \\ &= 0{,}2\,u_n - 0{,}01 \\ &= 0{,}2\left(u_n - \frac{0{,}01}{0{,}02}\right) \\ &= 0{,}2\left(u_n - 0{,}05\right) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = 0{,}2\,v_n$$

Suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $v_1 = u_1 - 0{,}05 = -0{,}05$

b) En déduire alors l'expression de termes de la suite (v_n) en fonction de n puis celle des termes de la suite (u_n) en fonction de n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$$

$u_n - 0{,}05 = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ d'où $u_n = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}05$

Exercice 2 :

Partie A

1. Voici les deux valeurs exactes demandées :

- $u_1 = -\frac{1}{2}\cdot {u_0}^2 + 3\cdot u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times 2^2 + 3\times 2 - \frac{3}{2}$
$= -2 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{-4+12-3}{2} = \frac{5}{2}$
- $u_2 = -\frac{1}{2}\cdot {u_1}^2 + 3\cdot u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\times\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$
$= -\frac{1}{2}\times\frac{25}{4} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2}$
$= \frac{-25+60-12}{8} = \frac{23}{8}$

2. A l'aide de la calculatrice, on a :
$u_3 \approx 2{,}992\,19$; $u_4 \approx 2{,}999\,97$

3. On peut conjecturer que la suite est croissante et converge vers le nombre 3.

Partie B

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \left(-\frac{1}{2}\cdot {u_n}^2 + 3\cdot u_n - \frac{3}{2}\right) - 3$
$= -\frac{1}{2}\cdot {u_n}^2 + 3\cdot u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\left({u_n}^2 - 6\cdot u_n + 9\right)$
$= -\frac{1}{2}\cdot\left(u_n - 3\right)^2 = -\frac{1}{2}\cdot {u_n}^2$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :

- **Initialisation :**
On a : $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$
Ainsi : $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$
Considérons l'encadrement suivant :
$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$
La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$:
$(-1)^2 \geqslant {v_n}^2 \geqslant 0^2$
$1 \geqslant {v_n}^2 \geqslant 0$
$-\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}\cdot {v_n}^2 \leqslant 0$
$-1 \leqslant -\frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$
$-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$
La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}\cdot v_n - v_n = -v_n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot v_n + 1\right)$

ht

b. Utilisons les encadrements obtenus à la question **2.** :

$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$	$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$
$1 \geqslant -v_n \geqslant 0$	$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot v_n \leqslant 0$
$-v_n \geqslant 0$	$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot v_n + 1 \leqslant 1$
	$0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot v_n + 1 \leqslant 1$
	$\frac{1}{2}\cdot v_n + 1 \geqslant 0$

Des deux encadrements précédents, on en déduit :
$-v_n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot v_n + 1\right) \geqslant 0$
$v_{n+1} - v_n \geqslant 0$
$v_{n+1} \geqslant v_n$
La suite $\left(v_n\right)$ est une suite croissante.

4. La question précédente montre que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante.
La question **2.** montre que la suite $\left(v_n\right)$ est majorée par 0.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ est convergente.

5. La limite ℓ de la suite $\left(v_n\right)$ vérifie l'égalité :
$\ell = -\frac{1}{2}\cdot\ell^2$
$\ell + \frac{1}{2}\cdot\ell^2 = 0$
$\ell\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\ell\right) = 0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$\ell = 0$	$1 + \frac{1}{2}\cdot\ell = 0$
	$\frac{1}{2}\cdot\ell = -1$
	$\ell = -2$

Puisque ℓ appartient à l'intervalle $\left[-1\,;0\right]$, on en déduit la valeur de ℓ : $\ell = 0$.

6. De la définition de la suite $\left(v_n\right)$, on en déduit :
$v_n = u_n - 3$
$u_n = v_n + 3$
On a la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n + 3 = 0 + 3 = 3$

Pour étudier la croissante de la suite $\left(u_n\right)$, étudions la différence suivante :
$u_{n+1} - u_n = \left(v_{n+1} + 3\right) - \left(v_n + 3\right) = v_{n+1} - v_n$
La suite $\left(v_n\right)$ est croissante :
$= v_{n+1} - v_n \geqslant 0$
$\geqslant 0$

La suite $\left(u_n\right)$ est croissante.