Interrogation Terminale A : suite et récurrence

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 0{,}04$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n < 0{,}05$

2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - 0{,}05$

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

   b) En déduire alors l'expression de termes de la suite (v_n) en fonction de n puis celle des termes de la suite (u_n) en fonction de n

Exercice 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot {u_n}^2 + 3\cdot u_n - \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$v_n = u_n - 3$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot {v_n}^2.$$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
   $$-1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} - v_n = -v_n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot v_n + 1\right).$$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\,;0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\cdot\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.